適応信号処理の一般理論の探求 ： 不動点近似と時変計量射影を軸にして

Pursuing the General Theory of Adaptive Signal Processing : An Approach Based on Fixed Point Approximation and Variable-Metric Projection

湯川　正裕 (Masahiro YUKAWAI, Dr. Eng.)
新潟大学工学部電気電子工学科准教授
(Department of Electrical and Electronic Engineering, Associate Professor, Niigata University)
電子情報通信学会　IEEE　EURASIP　会員
受賞：平成 2009 年度 電子情報通信学会学術奨励賞　平成 2009 年度 エリクソン・ヤングサイエンティストアワード　平成 2006 年度 丹羽保次郎記念論文賞　平成 2005 年度 電子情報通信学会論文賞
研究専門分野：適応信号処理　スパース信号処理　カーネル適応フィルタ

あらまし　本稿では、不動点近似と時変計量射影に基づく適応信号処理に関する研究成果を紹介する。これは、2003 年に創始された適応信号処理パラダイム「適応射影劣勾配法」の適用範囲を広げ、各応用に適した適応信号処理アルゴリズムを開発する手助けとなるものである。適応射影劣勾配法は、不動点近似に基づく適応信号処理方式であり、学習同定法・アフィン射影法・線形制約つき NLMS 法などを導出する指導原理となっている。また、これらの適応アルゴリズムの収束に関する決定論的解析が与えられており、適応信号処理の堅固な土台となっている。本研究では、適応射影劣勾配法の範疇に入らない有用な適応アルゴリズムを包括する柔軟な枠組みを構築すべく、時変計量射影という新たな概念を導入し、これらの適応アルゴリズムの統一的な解析に成功した。歴史的背景と研究目的から本題へ進み、結びに将来の展望に関する個人的な所見を述べる。

1．歴史的背景と研究目的

20 世紀中頃、A. N. Kolmogorov と N. Wiener によって（独立に）統計的アプローチに基づく最適線形フィルタ理論が確立された(1)-(3)。最適線形フィルタ理論は、ディジタル通信の歴史の中で、情報化時代のマグナカルタとも言える C. E. Shannon の標本化定理（脚注：同定理は、1933 年にロシア人の V. A. Kotelnilov（当時 25 歳）によって発見されている。）と並ぶ大きな貢献として位置づけられる (4)。最適線形フィルタは、一般にウィナーフィルタと呼ばれるが、信号が統計的に定常であるという仮定の下で、所望信号とフィルタ出力の平均 2 乗誤差を最小にすることから、最小平均 2 乗誤差（MMSE: Minimum Mean Square Error）フィルタと呼ばれることもある。ここでは、MMSE フィルタと呼ぶことにする。

MMSE フィルタは信号の統計量を用いて記述されるため、これを実現するためには、信号の統計量を事前に獲得しておく必要がある。正確な統計量の獲得は一般に困難であり、また、仮に獲得することができたとしても、実際に送受信される信号の統計的性質が変わってしまえば、もはや最適でなくなってしまう。素直に考えると、定期的に統計量の推定を行ない、これに基づいて MMSE フィルタを再計算するというアプローチ（バッチ処理）が考えられるが、これは極めて精巧で高コストなハードウェアが必要になるという欠点があり、実時間処理には不向きである。これに代わるアプローチとして、適応フィルタが登場した。

適応フィルタは、適当な初期フィルタ（ユークリッド空間の点）からスタートして、観測データや先験情報を拠り所に MMSE フィルタに近づくようにフィルタ係数を逐次的に更新していくアプローチであり、信号の統計的性質の変化等による MMSE フィルタの変動にも追従することが可能である。このフィルタ係数の更新規則を与えるのが適応信号処理アルゴリズムであり、1960 年に B. Widrow と M. E. Hoff Jr.によって提案された LMS (Least Mean Square) 法(5) を火種に、数多くの研究者達の手によって発展してきた。詳細な発展の歴史については、文献(6)-(8) などを参照されたい。適応フィルタの応用例を図１に示す。

適応信号処理の一般理論の探求 ： 不動点近似と時変計量射影を軸にして

Pursuing the General Theory of Adaptive Signal Processing : An Approach Based on Fixed Point Approximation and Variable-Metric Projection

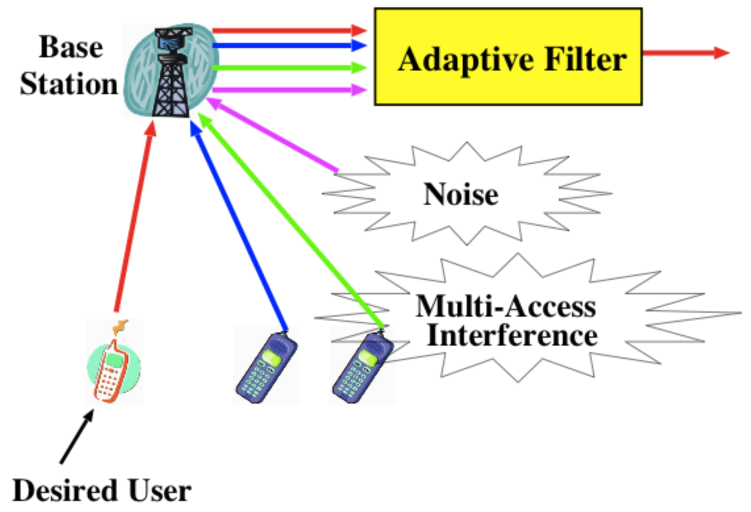

図１　適応信号処理の応用例（多ユーザ干渉抑圧問題）　干渉波や雑音に埋もれた所望信号を復元することが目的

本稿では、これまでに提案されてきた種々の適応アルゴリズムに対する統一的な視座を与えるとともに、優れたアルゴリズムを導く指導原理を追究した研究の一端を簡単に紹介する。一般に、適応アルゴリズムの収束については統計的解析が主流であるが、独立性と呼ばれる仮定を含む幾つかの非現実的な仮定が必要である他、個々のアルゴリズム毎に個別の解析が必要であるため、研究する側の大変さに加えて、研究論文を読む側にとってもこれら全ての解析を正確に理解することは極めて根気のいる作業であると言える。これらの問題点を解決すべく、2003 年に不動点理論に基づく決定論的解析への取り組みが開始された[9]。この決定論的解析に関する研究の一環として著者が携わったのが本稿でご紹介する研究である。キーワードは「不動点近似」と「時変計量射影」である。これらの用語の説明も含めて、**次章**以降、一連の研究について述べる。

２．不動点近似に基づく適応信号処理と決定論的解析

２．１　不動点と適応信号処理

不動点という言葉に馴染みがない読者が多いと思う（脚注：不動小数点と混同してはならない）。ある空間 X から同じ空間 X への写像 T が与えられたとする。この写像 T によって動かざる点のことを「不動点」という。例えば、X が実数全体の集合であるとする。実数 x を 0.5 倍する写像 T を考えたとき、不動点は $x=0$ である（実際、$T(0)=0\times0.5=0$）。一般に、不動点は一つだけとは限らず、T の不動点を全て集めた集合を「T の不動点集合」という。では、何故、不動点が適応信号処理と関係するのだろうか。

適応信号処理では、時々刻々変化する未知系を瞬時データに基づいて推定・追従することが目的となる。従って、未知系を正確に求めるのに十分なデータを得られる状況は、現実的に考え難い。何故なら、十分にデータを蓄えた頃には未知系が変化してしまっているかもしれないからである。このことから分かるのは、「最適な一点」を求めるよりも、「未知系を含んでいると考えられる解の候補（集合 S とする）」を特定し、集合 S の中の点を求める方が現実的であるということだ。集合の中のどの点を選ぶかによって推定精度が違うのではないか、と思うかもしれない。確かにその通りであるが、実際に得られるデータから特定できるのは「集合 S 」までであり、それ以上、候補を絞り込むためには他の情報が必要である。先験情報が利用できる場合には、それを効果的に利用する方法も**本章**で述

べる適応信号処理方式に含まれている。時々刻々変化する未知系を追従する適応信号処理において最も重要な性質は「各時刻において未知系に必ず近づく」ことであり、これが保証されないアルゴリズムは不安定となり、発散してしまう危険性がある。しかし、分からない未知系に必ず近づくことをピンポイントで保証するのは現実的でない。これに代わる現実的な性質として、集合 S は観測データから分かっているので「各時刻において集合 S の全ての点に必ず近づく（脚注：この性質は「Fejer monotone」と呼ばれる）」ことを目標にするのが妥当であろう。

さて、ここまで「集合の外にいること」を前提として議論してきた。それでは、「集合の中（境界を含む）にいる場合」には、どのような性質が望まれるだろうか。この場合、既に未知系を表わす点にいる可能性もあり、へたに動いてしまうと未知系から遠のいてしまう危険性がある。然るに、集合の中にいる場合は「動かない」ことが望ましい。ここで不動点が姿を現わす。つまり、現在のフィルタを更新する規則を表現する写像を T_k（k は時刻を表わす）としたとき、T_k の不動点集合が解の候補となるように T_k を設計すれば良いわけである。また、上で述べた「Fejer monotone」という性質を満たす写像を構成するためには、集合が「閉じている（境界を含む）」ことと「凸である（凹みがない）」ことが必要であることが分かっている。**次節**で登場する写像の不動点集合はこの性質を満たすことが分かっている。

２．２ 適応射影劣勾配法と決定論的解析

不動点近似に基づく適応信号処理方式である「適応射影劣勾配法[9,10]」とその決定論的解析を概説する（不動点近似に基づく信号処理の詳細については、例えば文献(11)を参照されたい)。凸集合上での最小化問題に対する解法として射影勾配法が有名であるが、これは微分可能な凸関数に対してのみ適用することができる。微分可能でない連続凸関数に対しては、幾つかの条件の下で、ロシア人数学者 B. T. Polyak の射影劣勾配法が利用できる[12]。適応射影劣勾配法は、射影劣勾配法の拡張であり、射影劣勾配法と学習同定法[13,14]の類似性に着眼することで 2003 年に誕生した。ここで、少し用語の説明をしておく。ある点 x から凸集合 C への射影というのは、C の中で x に最も近い点を対応させる写像である。例えば、球への射影は、球の中心と x を直線で結び、それが球面と交わる点である（勿論、球の中に x がある場合、射影は x 自身である)。この例から分かるように、凸集合 C への射影の不動点集合は集合 C である。言い換えると、集合 C は、「C への凸射影」という写像の不動点集合として特徴づけることができる。特に、凸集合が線形である場合、その幾何学的性質から直交射影という。また、劣勾配というのは、勾配を微分不可能な関数に拡張した概念であり、(凸関数の場合には) 勾配の一般化になっている（すなわち、関数が微分可能であるとき、劣勾配は勾配に一致する)。劣勾配の正確な定義は割愛するが、微分不可能な尖った部分を含む関数を考えたとき、尖った点における接線は複数存在するが、それらの接線の中の（任意の）一つだと思っていただければ結構である（脚注：連続な凸関数に対して劣勾配が必ず存在することが知られている)。これが分かれば、射影（劣）勾配法を理解するのは難しくない。適当な初期値からスタートし、(劣) 勾配の逆方向（つまり最急降下方向）に少しだけ動いて関数値を減少させる。次に、移動後の点が凸集合の外にいれば射影によって強制的に凸集合へ移し、逆に移動後の点が凸集合の中にいれば何もしない。もう少し正確に述べると、射影劣勾配法の第一ステップは劣勾配射影と呼ばれるものであり、劣勾配射影の不動点集合は関数値がゼロ以下となるベクトルの集合（ゼロレベル集合）となる。この２つの操作を繰り返し行ない、動かなくなった点が最小解となる。

さて、適応信号処理の場合、同じアプローチが適用できるだろうか？適応信号処理では、最小解（未知系）が時間とともに変化していくため、予め決められた最小化問題を解くだけでは不十分である。そのため、時間とともに変化する関数を考えるのが自然である。時系列データのような「時間の関数」を考えるといっている訳ではない。フィルタ係数ベクトルを引数とする実数値関数そのものが時間とともに変化するということである。各時刻 k における関数を Θ_k とし、関数列 ($\Theta_0, \Theta_1, \Theta_2$、...)を考える。ここで、$\Theta_k$ は時刻 k で観測されたデータによって決まり、その（凸制約集合上で

の）最小解集合が「その時刻における未知系」を特徴付けるものである。適応アルゴリズムに要請される性質は「各時刻で最小解集合に必ず近づくこと」と「関数列($\Theta_0,\Theta_1,\Theta_2,\ldots$)を漸近的に最小化すること」である。この複雑で難解に思える問題を解く手法が適応射影劣勾配法である。適応射影劣勾配法の各ステップはとてもシンプルである。適当な初期値からスタートして、Θ_0の劣勾配の逆方向に少しだけ進み、射影によって凸集合上へ強制的に移動する。(脚注：考慮すべき凸集合（先験情報）がない場合は、ユークリッド空間全体を凸集合としておけば、射影はないものと同じになる。）次の時刻では、新たに観測されたデータを用いて定義される Θ_1 の劣勾配の逆方向に少しだけ進み、射影によって凸集合上へ強制的に移動する。射影劣勾配法に非常に良く似ているが、劣勾配を計算する関数が毎時刻変わる点が大きく異なる。つまり、各関数は、アルゴリズムにおいて一度きりしか考慮されない。適応射影劣勾配法のイメージが伝わっただろうか。「ある関数値を減らして凸集合へ戻す、別の関数値を減らして凸集合へ戻す、更に別の関数値を減らして・・・」という操作を繰り返すわけである。「関数値を減らす操作」が劣勾配射影であり、「凸集合へ戻す操作」が射影である。関数の具体的な設計例は次節で紹介する。

最後に、適応射影劣勾配法の決定論的解析の概要を述べる。第一に、各時刻で定義される関数 Θ_k の最小解集合（未知系の候補）に必ず近づくことが保証される。第二に、時間とともに変化する最小解集合が（有限個の例外を除いて）共通部分を持つとき、ある緩い条件の下で、適応射影劣勾配法が関数列($\Theta_0,\Theta_1,\Theta_2,\ldots$)を漸近的に最小化することが示されている。第三に、生成される点列の収束も保証され、収束点の特徴付けも与えられている。強調すべきは、解析において、期待値演算などの統計的操作が一切使われていないことである。例えば、学習同定法は平均収束することが知られているが、特定の状況を考えた場合、収束しない例も示されている。

2.3 適応アルゴリズムの具体例

各時刻で観測されるデータに対して誤差をゼロにするフィルタの集合は、ユークリッド空間の超平面（脚注：フィルタ次数を N としたとき、超平面は N−1 次元部分空間を平行移動したものであり、全空間を二つの部分に分割する）となる。これらの超平面へのユークリッド距離を Θ_k として選び、凸集合を全空間とした場合、適応射影劣勾配法から学習同定法が導かれる。すなわち、学習同定法は、瞬時誤差ゼロの超平面との距離を漸近的に最小化する方法とみることができる。現在のデータだけでなく、過去の幾つかのデータに対しても同時に誤差をゼロにする集合（複数の超平面の共通部分であり、線形多様体と呼ばれる集合になる）を用いれば、アフィン射影法[15],[16]が得られる。更に、複数の超平面への平均距離を用いることで適応並列射影劣勾配法[17]が得られる。同様にして、制約付きの適応アルゴリズム[18]も得ることができる。

3．時変計量射影に基づく適応信号処理パラダイム

3．1 適応射影劣勾配法に含まれない適応アルゴリズム

第２章で述べたように、適応射影劣勾配法は様々な適応アルゴリズムを導出する指導原理であり、また、統一的な決定論的解析を与えている。一方で、入力信号の統計的性質や未知系に関する先験情報に基づく手法で、この枠組みに直接的に含まれないものがある。一つ目は、変換領域適応アルゴリズム[19]である。これは、入力ベクトルに離散フーリエ変換や離散コサイン変換などの直交変換を施した後に、変換領域でパワーの正規化を行なうことで入力信号を擬似的に白色化する手法である。これにより、強い有色性を持つ入力信号（例えば音声信号など）に対する収束速度を大きく改善できることが知られている。二つ目は、係数比例型適応アルゴリズム[20]である。これは、未知系がスパース（脚注：ベクトルの係数の多くがゼロ、もしくはゼロに近い値を取る場合、そのベクトルはスパースであるという）である場合（例えばエコー経路、通信路など）、それを先験情報として利用することで収束速度を向上させる手法である。具体的には、各時刻におけるフィルタ係数の絶対値に比例したステップサイズを各係数に割り当てることで、小さな係数はあまり更新されなくなる一方、大きな係数は大きく更新され、結果として収束速度が向上する。この他、LMS ニュート

ン適応アルゴリズムや準ニュートン適応アルゴリズムなども適応射影劣勾配法に含まれない。

最後にもう一つ、著者自身が提案した適応アルゴリズムを紹介する。上述した係数比例型適応アルゴリズムは、未知系がスパースでない応用（例えば、多ユーザ干渉抑圧問題など）に対しては、その有効性を十分に発揮することができない。例えば、画像データのようにある既知の基底（ウェーブレットなど）を用いてスパースに表現できることが予め分かっている応用であれば、その基底を用いてスパース化することができる。しかし、一般にはこのような先験情報が得られるとは限らない。このような場合にも、アルゴリズムの収束速度を向上させたいという要求がある（多ユーザ干渉抑圧問題の場合、収束速度を向上させることで、伝送レートが大きく改善される）。著者は、共役勾配法などで用いられるクリロフ部分空間に着目した。入力ベクトルの共分散行列の固有値広がり（２ノルムの条件数）が十分小さい場合、未知系のほとんどのエネルギーが低次元のクリロフ部分空間に集中することを明らかにした。具体的には、未知系をクリロフ部分空間のベクトルで近似したときのエネルギー損失が、クリロフ部分空間の次元を増やすことにより$(a-1)/(a+1)$の指数乗で減衰することを証明した。ここで、$a\,(\geqq 1)$は共分散行列の固有値広がりの正の平方根とする。つまり、a の値が小さい程、早く減衰し、次元の小さなクリロフ部分空間で高精度な近似ができる､すなわち、よりスパースな（ゼロに近い係数の多い）表現ができることになる。これを「疎構造化」と呼ぶ。疎構造化された未知系に対して係数比例型適応アルゴリズムを適用することで､収束速度が大幅に向上する｡しかし、そのまま適用してしまうと、各時刻における係数更新のために行列とベクトルの積を計算する必要があり、計算量が大きく増加してしまう。この問題を解決するために、小さな係数に対するステップサイズが収束速度に大きな影響を与えないことを発見し、これらのステップサイズを全て一定にすることでフィルタ次数の線形オーダーの計算量を実現することに成功した(21)。また、詳細は省略するが、ある非凸離散最適化問題の解を閉じた形で与えることにより、収束特性を更に改善することにも成功している(22)。

本節で述べた有用な適応アルゴリズムを包括する一般的枠組みの探求を次節で述べる。

３．２ 時変計量射影と適応射影劣勾配法

時変計量射影に基づく適応射影劣勾配法の研究は、**３．１節**で述べた適応アルゴリズムの各更新を２次計量（すなわち、正定値行列を挟む形の内積から導かれる計量）を用いた直交射影として解釈することから始まる。２次計量を用いる点を除けば、学習同定法と同じ超平面に射影しているとみることができるのである。従って、この計量が固定されてさえいれば、一般のヒルベルト空間上で構築された適応射影劣勾配法の理論をそのまま適用することができる。しかし、問題は、この計量が時間とともに変わってしまうのである。理由は、例えば変換領域適応アルゴリズムの場合、変換領域におけるパワーの推定値が毎時刻変わるからである。通常、ヒルベルト空間における最適化では、内積を一つ定めるのが原則であり、計量が時間とともに変化してしまう状況は想定外である。そこで著者は、固定されたヒルベルト空間で収束を議論するという大原則を取り払ってみた。すると、途端におかしなことが起こる。計量が変化すると言っても、それぞれの計量の定める空間においては確かに直交射影を計算するわけである。ところが、一つの固定した計量の空間でアルゴリズムの振る舞いを考察してみると、極端な話、ある時刻では右に移動せよと言っていたものが、次の時刻では（180 度近く異なる）左の方へ移動せよということが起こりうるのである。これでは、収束を証明する望みはないに等しい。しかし、ここで諦めるわけにはいかないので、上で述べたような極端な状況が起こらないための仮定が必要であると考える。そのためには､計量が急激に変化するのを防ぐ必要があるので、計量を定める正定値行列の変動量に規制をかける必要があることが直感的に分かる。(脚注 : 実際、パワーの推定値などは急激に変化することはなく、定常状態ではほぼ一定であると仮定できる。) しかし、具体的にどのように規制したら良いだろうか｡検討を重ねた結果、最終的に、以下の仮定の下で、厳密な収束定理を与えることに成功した(23)。仮定１．計量行列の固有値の有界性 : 各時刻で利用される計量行列の固有値が、ある

２つの正の定数の間に必ず存在する。仮定２．ある正定値行列 G が存在して、各時刻で利用される計量行列と G の差の２ノルム（最大固有値）がある値より小さくなる。ここで、「ある値」は、(i)仮定１で出てきた２つの定数、(ii)G の最大・最小固有値、(iii)ステップサイズの下限と上限、(iv)係数更新によるフィルタの変動量、(v)更新前後のフィルタとベクトル z の誤差によって定まる。ここで、z は解の候補となる凸集合達（第２章を参照）の共通部分の中の点と思っていただきたい。

これによって、３．１節で述べた全ての適応アルゴリズムを包括する一般的枠組みを構築することができた。図２に適応射影劣勾配法と本研究の関係を記す（赤丸で囲んだ部分が本研究成果によって新たに取り扱うことができるようになったアルゴリズムである）。

３．３ 並列時変計量射影型適応アルゴリズムの導出

本節では、３．２節で紹介した枠組みを使って導出した適応アルゴリズムを紹介する。基本的なアイディアは適応並列劣勾配射影法[17]と同様であり、文献 (22) のアルゴリズムを並列化することで、並列計算に適した適応アルゴリズムを導出することである。時変計量射影に基づく適応射影劣勾配法を、複数の時刻で得られた観測データで決まる超平面への平均距離（ただし、距離は各時刻で定義される計量で定まる）に適用することで適応アルゴリズムが導かれる。文献(22)で導出した計量が、並列射影型アルゴリズムへ拡張可能であることを明らかにした[24]。図３、４に文献(24) の成果の一部を記す。NLMS 法と比較すると、少しの計算量の増加で MSE 曲線の収束速度を大きく改善できていることが確認できる。一方、RLS 法と比較すると、格段に少ない計算量で高速な収束・追従性能を実現していることが分かる。

４．結び

本稿では、適応信号処理の一般理論を探求した研究として、不動点近似と時変計量射影に基づく適応射影劣勾配法を紹介した。信号処理研究の著しい進展によって信号処理の手法が多様化していく中、これらを体系的に整理し、統一的な視座を手に入れることは、我々人類に大きな恩恵をもたらすに違いない。本研究成果は、適応射影劣勾配法による強固な体系の幹を太くすることで枝を広げ、新しい実（科学技術）を産出する可能性を高めることができたのではないかと考えている。適応信号処理の応用範囲は、もはや音声・音響・通信に留まらない。本稿では触れなかったが、適応射影劣勾配法は「分散型信号処理」や「再生核を用いた非線形オンライン学習」などとも関連して進展し、応用の裾野を広げている[25],[26]。また、適応射影劣勾配法

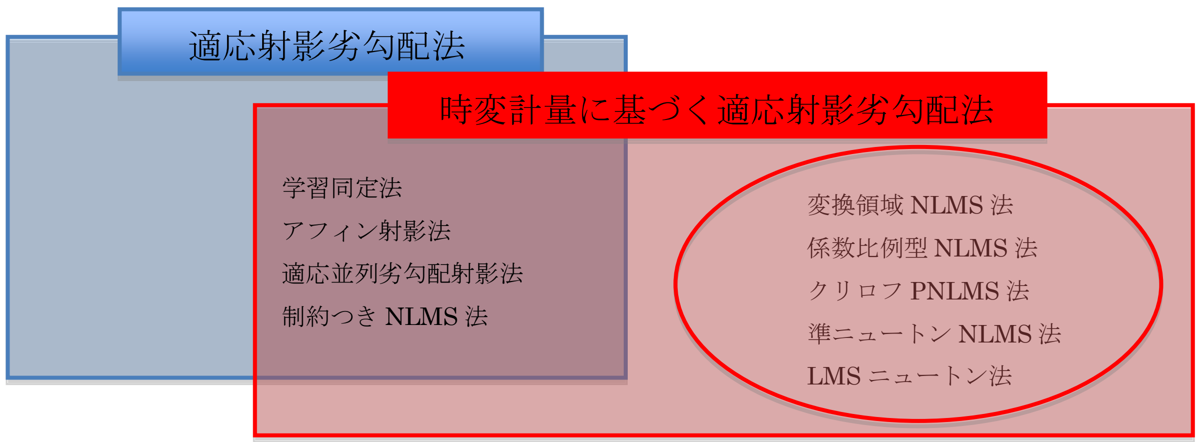

図２．時変計量を用いた適応射影劣勾配法の拡張

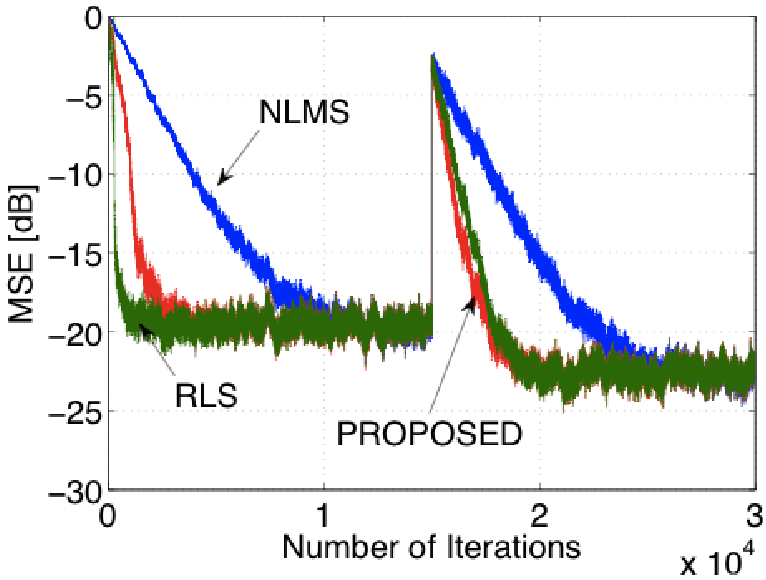

図３　均２乗誤差(MSE)曲線（フィルタ次数 256 の場合）

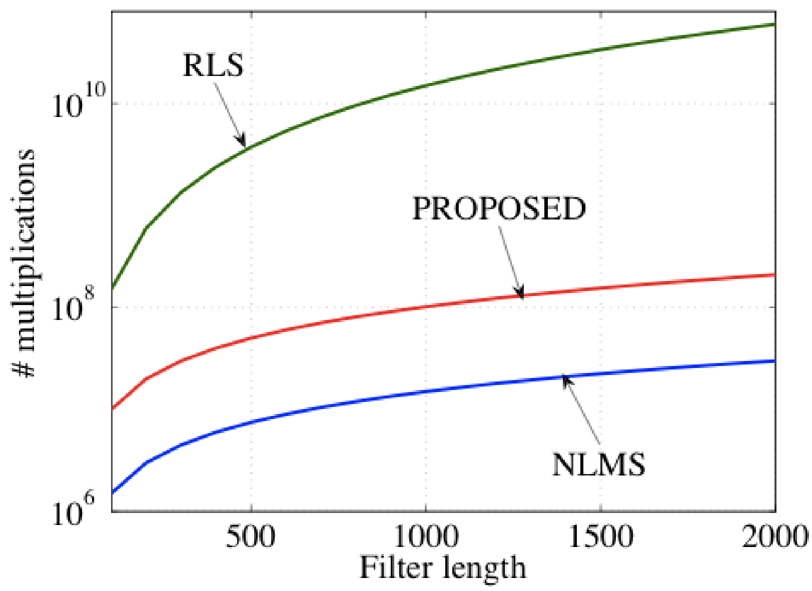

図４　フィルタ次数と計算量（乗算数）の関係

を凸解析の枠組みの外（非凸集合の場合）へ拡張する試みも海外で始められている(27)。日本発祥の適応信号処理方式は、既に海を越えて伝わり、進化を続けている。近い将来、日本の科学技術者にも広く理解され、実用化が進行していくことを願う。なお、適応射影劣勾配法とその周辺について、2010 年にミュンヘン工科大学（独国）で著者が担当した集中講義の講義ノートを Web で公開しているので参考までに紹介させていただく(28)。

謝辞：適応射影劣勾配法についてご教授いただいた恩師であり、本研究プロジェクトの研究代表者である山田功教授（東京工業大学）に心より深謝する。第２章の執筆に当たり、ICASSP2012（京都）における同教授のチュートリアル(29)を参考にさせていただいた。

参考文献

(1) N. Kolmogorov, “Sur l'interpolation et extrapolation des suites stationaires,” *Comptes Rendus de l'Academie des Sciences,* **Vol. 208,** pp. 2043–2045, (1939).
(2) A. N. Kolmogorov, “Interpolation and extrapolation,” *Bulletin de l'Academie des Sciences de U.S.S.R.*, **Vol. Series Mathematics 5,** pp. 3–14, (1941).
(3) N. Wiener, Extrapolation, Interpolation, and Smoothing of Stationary Times Series: With Engineering Applications. Cambridge, MA: MIT Press, (1949).
(4) J. G. Proakis, Digital communications, 4th ed. New York: McGraw-Hill, (2001).
(5) B. Widrow and M. E. Hoff Jr., “Adaptive switching circuits,” *in IRE WESCON Conv. Rec.*, **Vol. 4**, pp. 96–104, (1960).
(6) B. Widrow and S. D. Stearns, Adaptive signal processing. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, (1985).
(7) S. Haykin, Adaptive Filter Theory, 4th ed. New Jersey: Prentice Hall, (2002).
(8) A. L. Sayed, Fundamentals of adaptive filtering. John Wiley & Sons, (2003).
(9) 山田功、射影型適応アルゴリズムの新展開―射影劣こう配法による統一的視点とその応用、電子情報通信学会誌、**Vol.86, No.8,** pp.654–658, (2003).
(10) I. Yamada and N. Ogura "Hybrid Steepest Descent Method for Variational Inequality Problem over the Fixed Point Set of Certain Quasi- Nonexpansive Mappings", *Numerical Functional Analysis and Optimization*, **Vol.25, No.7&8**, pp. 619-655, (2004).
(11) I. Yamada, M. Yukawa, and M. Yamagishi, Fixed-Point Algorithms forInverse Problems in Science and Engineering, ser. Optimization and ItsApplications. New York: Springer, 2011, **Vol. 49**, ch. 17, pp. 345–390.
(12) B. T. Polyak, “Minimization of unsmooth functionals,” *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **Vol. 9, No. 3,** pp. 14–29, (1969).
(13) J. Nagumo and J. Noda, “A learning method for system identification,” *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **Vol. 12, No. 3**, pp. 282–287, (June 1967).
(14) A. E. Albert and L. S. Gardner Jr., Stochastic Approximation and Nonlinear Regression, MIT Press, Cambridge, Mass, USA, (1967).
(15) 雛元孝夫・前川禎男、“拡張された学習同定法、” 電学論、**Vol. 95-C**, pp. 227–234, (Oct. 1975).
(16) 尾関和彦・梅田哲夫、“アフィン空間への直交射影を用いた適応フィルタアルゴリズムとその諸性質、” 信学論(A)、**Vol. J67-A, No. 2**, pp. 126–132, (Feb. 1984).
(17) I. Yamada, K. Slavakis, and K. Yamada, “An efficient robust adaptive filtering algorithm based on parallel subgradient projection techniques,” *IEEE Trans. Signal Processing,* **Vol. 50, No. 5**, pp. 1091–1101, (May 2002).
(18) M-L. R. Campos, S. Werner, J. A. Apolinario. Constrained adaptive algorithm em- ploying Householder transformation. *IEEE Trans. on Signal Processing* **Vol. 50 No. 9,** pp. 2187-2195,

(2002).

(19) S. S. Narayan, A. M. Peterson, and M. J. Narasimha,"Transform domain LMS algorithm," *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, **Vol. 31, No. 3,** pp. 609–615, (1983).

(20) D. L. Duttweiler, "Proportionate normalized least-mean-squares adaptation in echo cancelers," *IEEE Transactions on Speech and Audio Processing*, **Vol. 8, No. 5,** pp. 508–517, (2000).

(21) M. Yukawa, ``Krylov-proportionate adaptive filtering techniques not limited to sparse systems,'' *IEEE Trans. Signal Processing*, **Vol. 57, No. 3,** pp. 927--943, (March 2009).

(22) M. Yukawa and W. Utschick, "A fast stochastic gradient algorithm: Maximal use of sparsification benefits under computational constraints," *IEICE Trans. Fundamentals,* **Vol. E93-A, No. 2**, pp. 467--475, (February 2010).

(23) M. Yukawa and I. Yamada, ``A unified view of adaptive variable-metric projection algorithms,'' EURASIP Journal on Advances in Signal Processing, **Vol. 2009**, Article ID 589260, pp. 1-13, (2009).

(24) Masahiro Yukawa and Isao Yamada, "Set-theoretic adaptive filtering based on data-driven sparsification," *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing,* **Vol. 25,** pp. 707--722, Wiley, (2011).

(25) R. L. G. Cavalcante, A. Rogers, N. R. Jennings, and I. Yamada, "Distributed Asymptotic Minimization of Sequences of Convex Functions by a Broadcast Adaptive Subgradient Method," *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, **Vol. 5, No. 4**, pp. 739-753, (Aug. 2011).

(26) S. Theodoridis, K. Slavakis, and I. Yamada, "Adaptive learning in a world of projections: a unifying framework for linearand nonlinear classification and regression tasks," *IEEE Signal Processing Magazine,* **Vol. 28, No. 1**, pp. 97–123, (Jan. 2011).

(27) Y. Kopsinis, K. Slavakis, S. Theodoridis, and S. McLaughlin. Generalized thresholding sparsity-aware algorithm for low complexity online learning. In Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP), pp. 3277--3280, Kyoto: Japan, (March 2012).

(28) hQttp://telecom0.eng.niigata-u.ac.jp/yukawa/lecture.html

(29) S. Theodoridis, I. Yamada, and K. Slavakis, "Learning in the context of set theoretic estimation: an efficient and unifying framework for adaptive machine learning and signal processing," *Tutorial at ICASSP 2012,* Kyoto: Japan, (March 2012).

この研究は、平成１９年度ＳＣＡＴ研究助成の対象として採用され、平成２０年度～２２年度に実施されたものです。