

調査研究報告書

長距離光ファイバ伝送における非線形シャノン
限界と非線形補償技術の研究動向

平成26年3月

一般財団法人 テレコム先端技術研究支援センター

はじめに

実験、数値実験 (数値シミュレーション) を主体とする論文と比較して、理論主体の論文を読み解くことはたいへん骨の折れることではあるが、内容が理解できたかどうかの確認は容易である。なぜなら、「紙と鉛筆」さえあれば、読者自身で追体験することが比較的容易にできるからである。このことは、機材、ノウハウ、経費などの制約によって、一般的には、実験や数値シミュレーションの再現が限定的にしか行えないこととは対照的である。

本報告書は、「非線形シャノン限界および非線形補償技術」のサーベイのために、調査委員が何本かの理論主体の論文を精読した際に行った、理論の詳細な導出過程を示すものである。この過程は、論文執筆者の思考過程を、読者自身の思考の枠組みで捉え直して理解することであり、理論研究の遂行には不可欠である。従来の「博物学的報告書」とは趣きの異なる内容ではあるが、理論主体の論文の技術的内容を自家薬籠中の物とするには、論文中の数式を1つずつ理解していく地道な作業が必要になる。そのため、本報告書では、数式の導出過程をできるだけ丁寧に追うことに努めた。原論文を読む際に、本報告書がお役に立てば幸いである。

調査委員会名簿

本報告書は、調査委員会を設置して調査研究した成果を取りまとめたものである。調査委員会名簿は下記のとおりである。

(順不同 敬称略)

委員長	北山 研一	大阪大学 大学院 工学研究科 電気電子情報工学専攻 教授
委員	丸田 章博	大阪大学 大学院 工学研究科 電子情報システム専攻 准教授
事務局	門馬 弘	一般財団法人 テレコム先端技術研究支援センター 研究企画部 部長
事務局	宇都 徹	一般財団法人 テレコム先端技術研究支援センター 研究企画部 調査役

目次

はじめに	i
調査委員会名簿	ii
第1章 序論	1
第2章 ファイバ中の光パルスの伝搬を記述する方程式	3
2.1 線形なファイバ中を伝搬する単一偏波の光パルス	3
2.2 ファイバ中での非線形光学効果	5
2.3 ファイバ中での光パルス伝搬を記述する方程式	6
2.4 複屈折を有するファイバ中での光パルス伝搬を記述する方程式	8
第3章 無分散補償光伝送路における非線形干渉光のガウス雑音モデル	15
3.1 デジタル変復調方式の誤り率	15
3.2 伝送光信号のガウス雑音近似	23
3.2.1 周期的複素白色ガウス雑音過程	23
3.2.2 伝送光信号のガウス雑音近似	24
3.2.3 伝送光信号のモデル	26
3.3 四光波混合によって発生する非線形干渉雑音	27
3.3.1 非縮退四光波混合モデル	27
3.3.2 光増幅中継系において発生する四光波混合光	29
3.4 ガウス雑音モデル	31
3.4.1 FWM光がインコヒーレントな場合のガウス雑音モデル	32
3.4.2 FWM光がコヒーレントな場合のガウス雑音モデル	34
3.5 非線形干渉雑音の電力スペクトル密度	36
3.6 ナイキスト限界	37
3.7 伝送システム評価および設計への適用	42
第4章 準線形コヒーレント伝送システムにおける非線形シャノン限界	46
4.1 問題の設定	46
4.2 摂動法の適用	49
4.3 基本パルスの線形伝搬	55
4.4 コヒーレント検波	60

4.5	マスター方程式	62
4.6	ASE 雑音の影響	63
4.7	チャンネル内相互作用の影響	65
4.8	チャンネル間相互位相変調の影響 (I)	65
4.9	任意の入力パルス波形の線形伝搬	69
4.10	チャンネル間相互位相変調の影響 (II)	71
4.11	相互位相変調による干渉光電力の近似	86
4.12	非線形シャノン限界	89
第 5 章	非線形補償技術	98
5.1	スプリット・ステップ・フーリエ法による数値解析	98
5.2	ボルテラ級数展開による数値解析	99
5.3	摂動法の適用	101
第 6 章	今後の展望	106
	あとがき	110

第1章 序論

光ファイバ通信では、情報信号の時間変化に応じて光の振幅、周波数、位相を変調し、情報伝送を行う。従来の光通信システムでは、情報信号の「0」、「1」に応じて光の明滅を行うことにより、2値のデジタル伝送が行われてきた。一方、最近では、コヒーレント光通信技術の発展 [1,2] により、光の振幅および位相を変調した多値光伝送の研究開発が盛んに行われており、一部ではすでにその実用化がはじまっている [3]。光増幅技術によりファイバ損失を克服し、デジタルコヒーレント技術により、群速度分散や偏波モード分散などによる線形的な伝送歪みを克服した光ファイバ伝送技術に残された問題は、光増幅器雑音による信号対雑音電力比 (SN 比) の劣化とファイバ中で生じる非線形光学効果である。そのため、光ファイバ伝送システムでは、SN 比の劣化による通信路容量を与える「シャノン限界」 [4] に加えて、非線形光学効果も加味した通信路容量を与える「非線形シャノン限界」が示されている。「非線形シャノン限界」は一種の理論限界を与える式として広く用いられているが、その導出過程、適用範囲までが広く理解されているかどうかは疑わしい。また、将来のデジタルコヒーレント送受信 LSI への実装を目指して、非線形光学効果に起因する信号歪みを補償する技術の開発がすすめられている。

本報告書は、「非線形シャノン限界」および「非線形補償技術」に関するいくつかの論文の内容を調査研究したものである。まず、第2章では、後の章での議論の出発点となるファイバ中の光波の振る舞いを記述する非線形シュレディンガー方程式 (NLSE) とマナコフ方程式を紹介する。第3章および第4章では、NLSE から非線形シャノン限界が演繹的に導かれる過程を示す。第5章では、3種類の NLSE の解法を示し、それらの解法をどのように非線形補償技術に適用するかを示す。最後に、第6章では、非線形問題に対するいくつかのアプローチ法を比較し、非線形性を考慮した光ファイバ伝送技術の今後の技術展望の一端を紹介する。

参考文献

[1] Kazuro Kikuchi, “Analyses of wavelength- and polarization-division multiplexed transmission characteristics of optical quadrature-amplitude-modulation signals,” *Opt. Exp.*, Vol.19, No.19, pp.17985-17995 (Aug. 2011).

[2] Seb J. Savory, “Digital Coherent Optical Receivers : Algorithms and Subsystems (invited),” *IEEE J. Selected Topics in Quantum Electron.*, Vol.16, No.5, pp.1164-1179 (Sept./Oct. 2010).

[3] Etsushi Yamazaki, Shogo Yamanaka, Yoshiaki Kisaka, Tadao Nakagawa, Koichi Murata, Eiji Yoshida, Toshikazu Sakano, Masahito Tomizawa, Yutaka Miyamoto, Shinji Matsuoka, Junichiro Matsui, Atsufumi Shibayama, Jun-ichi Abe, Yuichi Nakamura, Hidemi Noguchi, Kiyoshi Fukuchi, Hiroshi Onaka, Katsumi Fukumitsu, Kousuke Komaki, Osamu Takeuchi, Yuichiro Sakamoto, Hisao Nakashima, Takashi Mizuochi, Kazuo Kubo, Yoshikuni Miyata, Hiroshi Nishimoto, Susumu Hirano, and Kiyoshi Onohara, “Fast optical channel recovery in field demonstration of 100-Gbit/s Ethernet over OTN using real-time DSP,” *Opt. Exp.*, Vol.19, No.14, pp.13179-13184 (June 2011).

[4] 瀧保夫, 通信方式, 電子通信大学講座 19, コロナ社 (1963).

第2章 ファイバ中の光パルスの伝搬を記述する方程式

本章では、ファイバ中における時間的に局在した光パルスの伝搬を記述する方程式を導出する [1,2]。

2.1 線形なファイバ中を伝搬する単一偏波の光パルス

弱導波近似が成り立つ単一モードファイバ中を伝搬する直線偏波 (Linearly Polarized : LP) モードの電界について考える。ファイバの軸方向 (長手方向) を z 軸とし、ファイバ中を伝搬する光パルスの電界 $\mathbf{E}(\mathbf{r}_\perp, z, t)$ を次のように書くことにする。

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_\perp, z, t) = \mathbf{i} \operatorname{Re}[E(z, t) \phi(\mathbf{r}_\perp) \exp\{i(\omega_0 t - \beta_0 z)\}] \quad (2.1)$$

ここで、 $\operatorname{Re}[*]$ は $[*]$ 内の実部を表す。 \mathbf{r}_\perp は z 軸に対して垂直なファイバ断面における座標、 $t[\text{s}]$ は時間をそれぞれ表す。 \mathbf{i} は偏波方向、すなわち、電界ベクトルの向きを表し、 z 軸に対して垂直な単位ベクトルである。 $E(z, t)$ は電界の包絡線振幅を表し、一般に複素関数である。また、その絶対値 $|E(z, t)|$ は光パルスの形状を表す。 $\phi(\mathbf{r}_\perp)$ は基本モード (LP₀₁ モード) のモード関数である。 $i = \sqrt{-1}$ は虚数単位、 $\omega_0[\text{rad/s}]$ は搬送波の角周波数であり、 $\beta_0[\text{rad/m}]$ は ω_0 における基本モードの伝搬定数である。

次に、光パルス $E(z, t)$ の時間 t に関するフーリエ変換 $\hat{E}(z, \Delta\omega)$ を求めてみよう。フーリエ変換の定義式

$$\hat{E}(z, \Delta\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} E(z, t) \exp(i\Delta\omega t) dt \quad (2.2)$$

より、時間的に局在した光パルスは有限な帯域幅を持つことが分かる。ファイバの入射端における光パルスの周波数スペクトルを $\hat{E}(z=0, \Delta\omega)$ とすると、この光パルスが、伝搬定数が $\beta(\omega)$ で与えられる線形なファイバ中を距離 L 伝搬後の周波数スペクトル $\hat{E}(z=L, \Delta\omega)$ は、式 (2.1) より、

$$\hat{E}(z=L, \Delta\omega) = \exp[i\Delta\beta(\Delta\omega)L] \hat{E}(z=0, \Delta\omega) \quad (2.3)$$

と表される。ここで、 $\Delta\beta(\Delta\omega) = \beta(\omega) - \beta_0$ である。

ところで、式 (2.2) の逆フーリエ変換は、

$$E(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{E}(z, \Delta\omega) \exp(-i\Delta\omega t) d(\Delta\omega) \quad (2.4)$$

である。よって、式 (2.3) を (2.4) に代入し、逆フーリエ変換を行うことによって、ファイバの出射端 ($z = L$) における光パルスを次式で求めることができる。

$$E(z = L, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{E}(z = 0, \Delta\omega) \exp\{-i(\Delta\omega t - \Delta\beta L)\} d(\Delta\omega) \quad (2.5)$$

ところが、 $\Delta\beta$ が $\Delta\omega$ に関する任意の関数である場合には、式 (2.5) の積分を解析的に行うことは難しい。そこで、角周波数 ω の関数である伝搬定数 $\beta(\omega)$ を搬送波の角周波数 ω_0 の周りでテイラー展開する。

$$\beta(\omega) = \beta_0 + \left. \frac{d\beta}{d\omega} \right|_{\omega_0} (\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2\beta}{d\omega^2} \right|_{\omega_0} (\omega - \omega_0)^2 + \frac{1}{6} \left. \frac{d^3\beta}{d\omega^3} \right|_{\omega_0} (\omega - \omega_0)^3 + \dots \quad (2.6)$$

より、

$$\Delta\beta(\Delta\omega) = \beta(\omega) - \beta_0 = \beta_0^{(1)}(\Delta\omega) + \frac{1}{2}\beta_0^{(2)}(\Delta\omega)^2 + \frac{1}{6}\beta_0^{(3)}(\Delta\omega)^3 + \dots \quad (2.7)$$

となる。ここで、

$$\beta_0^{(m)} = \left. \frac{d^m\beta}{d\omega^m} \right|_{\omega=\omega_0}, \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (2.8)$$

である。式 (2.6) のテイラー展開において、第何項までを用いて $\Delta\beta$ を近似するかは、入射端における光パルスのパルス幅に依存する。すなわち、パルス幅が狭くなると、帯域幅が広がるので、より高次の項まで考慮する必要がある。

ところで、ファイバの特性を表すパラメータとして、分散パラメータ $D[\text{s}/\text{m}^2]$ および分散スロープ $D_\lambda[\text{s}/\text{m}^3]$ がよく用いられる。以下では、 D および D_λ と $\beta_0^{(2)}[\text{s}^2/\text{m}]$ および $\beta_0^{(3)}[\text{s}^3/\text{m}]$ との関係を示す。まず、 D は $\beta^{(1)}$ の波長 λ による微分で定義され、次式で与えられる。

$$D \equiv \left. \frac{d\beta^{(1)}}{d\lambda} \right|_{\omega=\omega_0} = \left. \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{d\beta}{d\omega} \right) \right|_{\omega=\omega_0} = \left. \frac{d\omega}{d\lambda} \frac{d}{d\omega} \left(\frac{d\beta}{d\omega} \right) \right|_{\omega=\omega_0} = \frac{d\omega}{d\lambda} \beta_0^{(2)} \quad (2.9)$$

角周波数 ω と波長 λ との関係は

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda} \quad (2.10)$$

であるから、上式を λ について微分し、次式を得る。

$$\frac{d\omega}{d\lambda} = -\frac{2\pi c}{\lambda^2} \quad (2.11)$$

式 (2.11) を (2.9) に代入し、

$$D = -\frac{2\pi c}{\lambda^2} \beta_0^{(2)} \quad (2.12)$$

を得る。一方、 D_λ は D の λ による微分で定義され、

$$\begin{aligned} D_\lambda &\equiv \left. \frac{dD}{d\lambda} \right|_{\omega=\omega_0} = -2\pi c \left. \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\beta^{(2)}}{\lambda^2} \right) \right|_{\omega=\omega_0} = -2\pi c \left(-2\frac{\beta_0^{(2)}}{\lambda^3} + \frac{1}{\lambda^2} \left. \frac{d\beta^{(2)}}{d\lambda} \right|_{\omega=\omega_0} \right) \\ &= \frac{4\pi c}{\lambda^3} \beta_0^{(2)} - \frac{2\pi c}{\lambda^2} \frac{d\omega}{d\lambda} \left. \frac{d}{d\omega} \left(\frac{d^2\beta}{d\omega^2} \right) \right|_{\omega=\omega_0} = \frac{4\pi c}{\lambda^3} \beta_0^{(2)} + \left(\frac{2\pi c}{\lambda^2} \right)^2 \beta_0^{(3)} \\ &= -\frac{2D}{\lambda} + \left(\frac{2\pi c}{\lambda^2} \right)^2 \beta_0^{(3)} \end{aligned} \quad (2.13)$$

で与えられる。

2.2 ファイバ中での非線形光学効果

前節では、ファイバを分散性を示す線形な媒質とみなし、光パルス伝搬の様子を調べた。一方、ファイバ中では、直径が数 μm オーダーの屈折率の高いコア部に閉じ込められて光が伝搬するために、電界強度が局所的に強くなり、非線形分極が無視できなくなる。また、伝搬損失が小さく、強い電界強度を保ったままの状態でも長距離にわたって光が伝搬するためにファイバの長手方向に非線形光学効果が累積し、その効果が顕著に現れる。本節では、非線形光学効果がファイバ中を伝搬する光パルスに与える影響について説明する。

媒質の分極ベクトル \mathbf{P} を電界ベクトル \mathbf{E} のべき級数で展開し、

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \left(\chi^{(1)} \cdot \mathbf{E} + \chi^{(2)} : \mathbf{E}\mathbf{E} + \chi^{(3)} : \mathbf{E}\mathbf{E}\mathbf{E} + \dots \right) \quad (2.14)$$

と表すことにする。ここで、 ε_0 は真空の誘電率、 $\chi^{(1)}$ は線形感受率テンソル (2階のテンソル)、 $\chi^{(j)}$ ($j \geq 2$) は j 次の非線形感受率テンソル ($j+1$ 階のテンソル) である。式 (2.14) より、電界強度が弱い場合には、分極は電界に比例し、線形な媒質とみなすことができる。一方、電界強度が強くなると、非線形分極が無視できなくなり、非線形光学効果が現れる。

光ファイバの材料である石英ガラスは非晶質であり、反像対称性を欠く結晶ではないため、 $\chi^{(2)}$ によって引き起こされる2次の非線形光学効果をほとんど示さない。よって、光ファイバでは、 $\chi^{(3)}$ によって引き起こされる3次の非線形光学効果が最低次の非線形効果である。3次の非線形光学効果のうち、光カー効果 (Optical Kerr Effect) によって、電界強度に比例して屈折率が変化する非線形屈折率変化

Δn_{NL} を考えると、3次の非線形光学効果によるファイバの伝搬定数 β の変化 $\Delta\beta$ は Δn_{NL} に比例し、

$$\Delta\beta = k_0 \Delta n_{\text{NL}} \quad (2.15)$$

と表される。ここで、 $k_0 = 2\pi/\lambda$ は真空中の波数である。ところで、ファイバ中を伝送される電力 $P[\text{W}]$ は、式(2.1)より

$$P(z, t) = \int_S \mathbf{i}_z \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) dS = \frac{\beta_0 c \varepsilon_0}{2k_0} |E(z, t)|^2 \int_S |\phi(\mathbf{r}_\perp)|^2 dS \quad (2.16)$$

となる。ここで、 \mathbf{i}_z はファイバの長手方向の単位ベクトル、 \mathbf{H} は磁界であり、 $\int_S dS$ はファイバ横断面にわたる面積分を表す。式(2.16)より、

$$E'(z, t) \equiv \sqrt{\frac{\beta_0 c \varepsilon_0}{2k_0} \int_S |\phi(\mathbf{r}_\perp)|^2 dS} E(z, t) \quad (2.17)$$

を定義すると、 $|E'(z, t)|^2$ の単位は $[\text{W}]$ となる。このとき、式(2.15)は

$$\Delta\beta = \gamma |E'|^2 E' \quad (2.18)$$

と表される。ここで、 $\gamma[1/(\text{m} \cdot \text{W})]$ は光ファイバの非線形係数であり、非線形屈折率 $n_2[\text{m}^2/\text{W}]$ および実効コア断面積 $A_{\text{eff}}[\text{m}^2]$ を用いて、

$$\gamma = k_0 \frac{n_2}{A_{\text{eff}}} \quad (2.19)$$

と表される。また、 A_{eff} はモード関数 $\phi(\mathbf{r}_\perp)$ を用いて

$$A_{\text{eff}} = \frac{\left(\int_S |\phi(\mathbf{r}_\perp)|^2 dS \right)^2}{\int_S |\phi(\mathbf{r}_\perp)|^4 dS} \quad (2.20)$$

で定義される。

2.3 ファイバ中での光パルス伝搬を記述する方程式

本節では、分散性および非線形効果を考慮したファイバ中での光パルス伝搬を記述する方程式を導出する。まず、分散性について考えることにする。電界の複素包絡線振幅 $E(z, t)$ のフーリエ変換を

$$\tilde{E}(\Delta\beta, \Delta\omega) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E(z, t) \exp\{i(\Delta\omega t - \Delta\beta z)\} dt dz \quad (2.21)$$

で定義すると、

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^m E(z, t)}{\partial t^m} \exp\{i(\Delta\omega t - \Delta\beta z)\} dt dz = (-i\Delta\omega)^m \tilde{E} \quad (2.22)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^m E(z, t)}{\partial z^m} \exp\{i(\Delta\omega t - \Delta\beta z)\} dt dz = (i\Delta\beta)^m \tilde{E} \quad (2.23)$$

となる。式 (2.7) に $\tilde{E}(\Delta\beta, \Delta\omega)$ を乗じると、

$$\Delta\beta \tilde{E} = \beta_0^{(1)}(\Delta\omega) \tilde{E} + \frac{1}{2}\beta_0^{(2)}(\Delta\omega)^2 \tilde{E} + \frac{1}{6}\beta_0^{(3)}(\Delta\omega)^3 \tilde{E} + \dots \quad (2.24)$$

となる。式 (2.22) および (2.23) を考慮して (2.24) を逆フーリエ変換し、

$$-i \frac{\partial E}{\partial z} = i\beta_0^{(1)} \frac{\partial E}{\partial t} - \frac{\beta_0^{(2)}}{2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - i \frac{\beta_0^{(3)}}{6} \frac{\partial^3 E}{\partial t^3} + \dots \quad (2.25)$$

を得る。以下では、4次以上の分散性を無視する。式 (2.25) は線形な方程式であるから、 $E(z, t)$ を式 (2.17) で定義される $E'(z, t)$ で置き換えても、方程式は変わらない。次に、式 (2.18) で示した非線形効果による $\Delta\beta$ の変化を考慮し、(2.25) の右辺に (2.18) を加えると、

$$-i \frac{\partial E'}{\partial z} = i\beta_0^{(1)} \frac{\partial E'}{\partial t} - \frac{\beta_0^{(2)}}{2} \frac{\partial^2 E'}{\partial t^2} - i \frac{\beta_0^{(3)}}{6} \frac{\partial^3 E'}{\partial t^3} + \gamma |E'|^2 E' \quad (2.26)$$

となる。さらに、時間 t を群速度 $v_g = 1/\beta_0^{(1)}$ で動く時間 $t' = t - \beta_0^{(1)} z$ で置き換えると、

$$i \frac{\partial E'}{\partial z} - \frac{\beta_0^{(2)}}{2} \frac{\partial^2 E'}{\partial t'^2} - i \frac{\beta_0^{(3)}}{6} \frac{\partial^3 E'}{\partial t'^3} + \gamma |E'|^2 E' = 0 \quad (2.27)$$

となる。式 (2.27) が3次までの分散性および非線形屈折率変化を考慮したファイバ中での光パルス伝搬を記述する方程式である。式 (2.27) の適用範囲を考える上で、単一モード、単一偏波、準単色光近似 (搬送波周波数を f_0 、光パルスの帯域幅を $(\Delta f)_{\text{FWHM}}$ として、 $(\Delta f)_{\text{FWHM}} \ll f_0$) の下で (2.27) が導出されたことに注意しよう。また、式 (2.12) および (2.13) より、 $\beta_0^{(2)}$ および $\beta_0^{(3)}$ は分散パラメータ D および分散スロープ D_λ を用いて、

$$\beta_0^{(2)} = -\frac{\lambda^2}{2\pi c} D \quad (2.28)$$

$$\beta_0^{(3)} = \frac{\lambda^3}{(2\pi c)^2} (\lambda D_\lambda + 2D) \quad (2.29)$$

と表される。特に、 $\beta_0^{(2)}$ が零ではなく、パルス幅が数 ps 以上の単一チャンネルの光パルスの伝搬を考える場合には、 $\beta_0^{(3)} \sim 0$ とみなすことができ、式 (2.27) は

$$i \frac{\partial E'}{\partial z} - \frac{\beta_0^{(2)}}{2} \frac{\partial^2 E'}{\partial t^2} + \gamma |E'|^2 E' = 0 \quad (2.30)$$

と近似できる。式 (2.30) は非線形シュレディンガー方程式 (Nonlinear Schrödinger Equation : NLSE) と呼ばれる。

一方、ファイバの損失を考慮し、式 (2.27) の右辺に損失を表す項を加えると、

$$i \frac{\partial E'}{\partial z} - \frac{\beta_0^{(2)}}{2} \frac{\partial^2 E'}{\partial t^2} - i \frac{\beta_0^{(3)}}{6} \frac{\partial^3 E'}{\partial t^3} + \gamma |E'|^2 E' = -i\alpha E' \quad (2.31)$$

となる。ここで、損失係数 α [1/m] は $\hat{\alpha}$ [dB/m] を用いて、

$$\alpha = \frac{\log_e 10}{20} \hat{\alpha} \quad (2.32)$$

と表される。

2.4 複屈折を有するファイバ中での光パルス伝搬を記述する方程式

本節では、複屈折を有するファイバ中を伝搬する光パルスの振る舞いを記述する方程式を導出する [3-6]。

単一モードファイバ中には、偏波方向 (電界ベクトルの向き) が互いに直交した 2 つの偏波モードが存在する。ファイバの長手方向に沿ってコアの横断面が真円であれば、2 つの偏波モードは縮退し、同じ群速度で伝搬する。しかし、製造時の不完全性や敷設環境下において加わる様々な擾乱によって、コアの横断面が真円からわずかでも歪むと、モードの縮退が解けて、群速度およびモード関数がわずかに異なる 2 つのモードが現れる。これをモード複屈折 (Modal Birefringence) という。このことを考慮して、ファイバの軸方向を z 軸とし、ファイバ中を伝搬する光パルスの電界 $\mathbf{E}(\mathbf{r}_\perp, z, t)$ を次のように書くことにする。

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_\perp, z, t) = \text{Re} \left[\sum_{j=x,y} \mathbf{i}_j E_j(z, t) \phi_j(\mathbf{r}_\perp) \exp\{i(\omega_0 t - \beta_r z)\} \right] \quad (2.33)$$

ここで、 \mathbf{i}_j ($j = x, y$) は直交する 2 つの偏波方向を表し、 z 軸に対して垂直な単位ベクトルである。 $E_j(z, t)$ ($j = x, y$) は電界の包絡線振幅の j 方向成分を表し、一般に複素関数である。 $\phi_j(\mathbf{r}_\perp)$ ($j = x, y$) は j 方向に偏波した基本モードのモード関数である。また、 ω_0 は搬送波の角周波数である。 β_r は定数であり、2 つの偏波モードの ω_0 における伝搬定数の平均値とする。

次に、2つの偏波モードの伝搬定数を $\beta_j(\omega)$ ($j = x, y$) とする。角周波数 ω の関数である伝搬定数 $\beta_j(\omega)$ を搬送波の角周波数 ω_0 の周りでテイラー展開する。

$$\beta_j(\omega) = \beta_j(\omega_0) + \left. \frac{d\beta_j}{d\omega} \right|_{\omega_0} (\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2\beta_j}{d\omega^2} \right|_{\omega_0} (\omega - \omega_0)^2 + \dots \quad (2.34)$$

このとき、 $\Delta\beta_j(\Delta\omega)$ ($j = x, y$) を次式で定義する。

$$\begin{aligned} \Delta\beta_j(\Delta\omega) &= \beta_j(\omega) - \beta_r \\ &= \Delta\beta_{j0}^{(0)} + \beta_{j0}^{(1)}(\Delta\omega) + \frac{1}{2}\beta_{j0}^{(2)}(\Delta\omega)^2 + \dots \end{aligned} \quad (2.35)$$

ここで、

$$\Delta\beta_{j0}^{(0)} = \beta_j(\omega_0) - \beta_r = \beta_{j0}^{(0)} - \beta_r \quad (2.36)$$

$$\beta_{j0}^{(m)} = \left. \frac{d^m\beta_j}{d\omega^m} \right|_{\omega=\omega_0}, \quad (j = x, y; m = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.37)$$

である。このとき、式 (2.33) における β_r はその定義より

$$\beta_r = \frac{\beta_{x0}^{(0)} + \beta_{y0}^{(0)}}{2} \quad (2.38)$$

となり、上式を式 (2.36) に代入することにより、

$$\Delta\beta_{y0}^{(0)} = -\Delta\beta_{x0}^{(0)} \quad (2.39)$$

であることが分かる。

一方、3次の非線形光学効果によって誘起される非線形分極 \mathbf{P}_{NL} は

$$\mathbf{P}_{\text{NL}} \propto \frac{1}{3}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{E})\mathbf{E} \quad (2.40)$$

と表される [5]。モード関数については、 $\phi = \phi_x = \phi_y$ とみなすことができるとし、 ϕ を実関数として、式 (2.33) を (2.40) に代入すると、

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\text{NL}} \propto \text{Re} \left[\phi^3 \sum_{j=x,y} \mathbf{i}_j \left(\left\{ \left(|E_j|^2 + \frac{2}{3}|E_k|^2 \right) E_j + \frac{1}{3}E_k^2 E_j^* \right\} \exp\{i(\omega_0 t - \beta_r z)\} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{3}(E_j^2 + E_k^2)E_j \exp\{i3(\omega_0 t - \beta_r z)\} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.41)$$

となる。ここで、 $(j, k) = (x, y)$ または (y, x) である。 ω_0 近傍の周波数成分のみを考えているので、式 (2.41) 右辺のうち、 $\exp\{i(\omega_0 t - \beta_r z)\}$ に比例する項のみが今考えている非線形光学効果に寄与する。なお、 $\exp\{i3(\omega_0 t - \beta_r z)\}$ に比例する項は第三高調波発生 (Third Harmonic Generation : THG) を表す。よって、3次の非線

形光学効果によるファイバの伝搬定数 β_j の変化 $\Delta\beta_j^{\text{NL}}$ は、式 (2.17) で定義される $E'_j(z, t)$ を用いて

$$\Delta\beta_j^{\text{NL}} = \gamma \left\{ \left(|E'_j|^2 + \frac{2}{3} |E'_k|^2 \right) E'_j + \frac{1}{3} (E'_k)^2 (E'_j)^* \right\} \quad (2.42)$$

と表される。

まず、分散性について考えることにする。式 (2.21) に示した $\tilde{E}_j(\Delta\beta_j, \Delta\omega)$ を (2.35) に乗じると、

$$\Delta\beta_j \tilde{E}_j = \Delta\beta_{j0}^{(0)} \tilde{E}_j + \beta_{j0}^{(1)} (\Delta\omega) \tilde{E}_j + \frac{\beta_{j0}^{(2)}}{2} (\Delta\omega)^2 \tilde{E}_j + \dots \quad (2.43)$$

となる。式 (2.22) および (2.23) を考慮して、(2.43) を逆フーリエ変換し、

$$-i \frac{\partial E_j}{\partial z} = \Delta\beta_{j0}^{(0)} E_j + i\beta_{j0}^{(1)} \frac{\partial E_j}{\partial t} - \frac{\beta_{j0}^{(2)}}{2} \frac{\partial^2 E_j}{\partial t^2} + \dots \quad (2.44)$$

を得る。以下では、3次以上の分散性を無視する。式 (2.44) は線形な方程式であるから、 $E_j(z, t)$ を (2.17) で定義される $E'_j(z, t)$ で置き換えても、方程式は変わらない。次に、式 (2.40) に示した非線形効果による $\Delta\beta_j^{\text{NL}}$ の変化を考慮し、(2.44) の右辺に (2.42) を加えると、

$$\begin{aligned} -i \frac{\partial E'_j}{\partial z} &= \Delta\beta_{j0}^{(0)} \frac{\partial E'_j}{\partial t} + i\beta_{j0}^{(1)} \frac{\partial E'_j}{\partial t} - \frac{\beta_{j0}^{(2)}}{2} \frac{\partial^2 E'_j}{\partial t^2} \\ &\quad + \gamma \left\{ \left(|E'_j|^2 + \frac{2}{3} |E'_k|^2 \right) E'_j + \frac{1}{3} (E'_k)^2 (E'_j)^* \right\} \end{aligned} \quad (2.45)$$

となる。さらに、式 (2.45) の右辺第1項による位相変化を考慮して、

$$E'_j(z, t) = E''_j(z, t) \exp(i\Delta\beta_{j0}^{(0)} z) \quad (2.46)$$

と置き換えると、式 (2.45) は

$$\begin{aligned} -i \frac{\partial E''_j}{\partial z} &= i\beta_{j0}^{(1)} \frac{\partial E''_j}{\partial t} - \frac{\beta_{j0}^{(2)}}{2} \frac{\partial^2 E''_j}{\partial t^2} \\ &\quad + \gamma \left\{ \left(|E''_j|^2 + \frac{2}{3} |E''_k|^2 \right) E''_j + \frac{1}{3} (E''_k)^2 (E''_j)^* \exp(-i4\Delta\beta_{j0}^{(0)} z) \right\} \end{aligned} \quad (2.47)$$

となる。上式を導くに当たり、式 (2.39) を用いた。また、時間 t を

$$t' = t - \frac{\beta_{x0}^{(1)} + \beta_{y0}^{(1)}}{2} z \quad (2.48)$$

で置き換えると、式 (2.47) は

$$\begin{aligned} -i \frac{\partial E''_j}{\partial z} &= \pm i\Delta\beta_0^{(1)} \frac{\partial E''_j}{\partial t} - \frac{\beta_{j0}^{(2)}}{2} \frac{\partial^2 E''_j}{\partial t^2} \\ &\quad + \gamma \left\{ \left(|E''_j|^2 + \frac{2}{3} |E''_k|^2 \right) E''_j + \frac{1}{3} (E''_k)^2 (E''_j)^* \exp(-i4\Delta\beta_{j0}^{(0)} z) \right\} \end{aligned} \quad (2.49)$$

となる。ここで、

$$\Delta\beta_0^{(1)} = \frac{\beta_{x0}^{(1)} - \beta_{y0}^{(1)}}{2} \quad (2.50)$$

であり、式 (2.49) の右辺第一項の複号は、 $j = x$ の時、正の符号、 $j = y$ の時、負の符号となる。さらに、式 (2.49) 右辺の非線形項のうち、 $\exp(-i4\Delta\beta_{j0}^{(0)}z)$ を含む項は、 z に対して周期 $\pi/(2|\Delta\beta_{j0}^{(0)}|)$ で振動し、その振動速度は他の項と比べて非常に速い。そのため、 $\pi/(2|\Delta\beta_{j0}^{(0)}|)$ よりもゆっくりした周期で平均化することによって、この項は 0 となる。よって、式 (2.49) は

$$i \left(\frac{\partial E_j''}{\partial z} \pm \Delta\beta_0^{(1)} \frac{\partial E_j''}{\partial t} \right) - \frac{\beta_0^{(2)}}{2} \frac{\partial^2 E_j''}{\partial t^2} + \gamma \left(|E_j''|^2 + \frac{2}{3} |E_k''|^2 \right) E_j'' = 0 \quad (2.51)$$

と近似できる。また、上式において $\beta_{x0}^{(2)} = \beta_{y0}^{(2)} = \beta_0^{(2)}$ とした。式 (2.51) が 2 次までの分散性および非線形屈折率変化を考慮した複屈折性を有するファイバ中での光パルス伝搬を記述する方程式である。

複屈折の仕組みを細かく見ると、ファイバ中をある距離 (分散距離に比べて十分に短い距離) 進んだところで、複屈折の固有軸の方向が回転し、さらに複素電界包絡線振幅 E_x'' と E_y'' が感じる屈折率が違うので、伝搬する間に E_x'' の位相と E_y'' の位相との間に差が生じる。簡単のために、以下では一定の距離 z_h 毎に直交軸の回転が起こるとし、また、軸の回転の大きさ、および E_x'' と E_y'' の間の位相差は不規則に変化し、距離 z_h 毎のこれらの値の間に相関はないものとする。複屈折の大きさ ($\Delta\beta_0^{(1)}$ で評価) は常に一定とする。直交軸の回転角を θ 、 E_x'' と E_y'' の間の位相差を ϕ とおくと、軸の回転と位相差は次式に示す 1 次変換で書き表すことができる [4]。

$$\begin{bmatrix} E_{x'}'' \\ E_{y'}'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) e^{i\phi} \\ -\sin(\theta) e^{-i\phi} & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x'' \\ E_y'' \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

式 (2.52) はポアンカレ球面上での任意の角度 $\theta' = 2\theta$ と ϕ の回転を表す。式 (2.52) の逆変換

$$\begin{bmatrix} E_x'' \\ E_y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) e^{i\phi} \\ \sin(\theta) e^{-i\phi} & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{x'}'' \\ E_{y'}'' \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

を (2.51) に代入し、次式を得る。

$$\begin{aligned} i \frac{\partial E_{x'}''}{\partial z} &+ i \Delta\beta_0^{(1)} \left\{ \cos(2\theta) \frac{\partial E_{x'}''}{\partial t} - \sin(2\theta) e^{i\phi} \frac{\partial E_{y'}''}{\partial t} \right\} - \frac{\beta_0^{(2)}}{2} \frac{\partial^2 E_{x'}''}{\partial t^2} \\ &+ \frac{5}{6} \gamma (|E_{x'}''|^2 + |E_{y'}''|^2) E_{x'}'' \\ &+ \frac{\gamma}{6} [\cos(2\theta) \{ \cos(2\theta) (|E_{x'}''|^2 - |E_{y'}''|^2) E_{x'}'' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\sin(2\theta) (e^{-i\phi}(E''_{x'})^2(E''_{y'})^* + e^{i\phi}|E''_{x'}|^2 E''_{y'})\} \\
& -\sin(2\theta) \{\cos(2\theta) e^{i\phi}(|E''_{x'}|^2 - |E''_{y'}|^2)E''_{y'} \\
& -\sin(2\theta) (e^{i2\phi}(E''_{y'})^2(E''_{x'})^* + |E''_{y'}|^2 E''_{x'})\} = 0
\end{aligned} \tag{2.54}$$

$$\begin{aligned}
i\frac{\partial E''_{y'}}{\partial z} & - i\Delta\beta_0^{(1)} \left\{ \sin(2\theta) e^{-i\phi} \frac{\partial E''_{x'}}{\partial t} + \cos(2\theta) \frac{\partial E''_{y'}}{\partial t} \right\} - \frac{\beta_0^{(2)}}{2} \frac{\partial^2 E''_{y'}}{\partial t^2} \\
& + \frac{5}{6}\gamma(|E''_{x'}|^2 + |E''_{y'}|^2)E''_{y'} \\
& - \frac{\gamma}{6} [\sin(2\theta) \{\cos(2\theta) e^{-i\phi}(|E''_{x'}|^2 - |E''_{y'}|^2)E''_{x'} \\
& -\sin(2\theta) (e^{-i2\phi}(E''_{x'})^2(E''_{y'})^* + |E''_{x'}|^2 E''_{y'})\} \\
& + \cos(2\theta) \{\cos(2\theta) (|E''_{x'}|^2 - |E''_{y'}|^2)E''_{y'} \\
& -\sin(2\theta) (e^{i\phi}(E''_{y'})^2(E''_{x'})^* + e^{-i\phi}|E''_{y'}|^2 E''_{x'})\}] = 0
\end{aligned} \tag{2.55}$$

ここで、

$$\hat{\sigma} = \begin{bmatrix} \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) e^{i\phi} \\ -\sin(2\theta) e^{-i\phi} & -\cos(2\theta) \end{bmatrix} \tag{2.56}$$

を定義すると、式 (2.54)、(2.55) は

$$\begin{aligned}
i\frac{\partial}{\partial z} \begin{bmatrix} E''_{x'} \\ E''_{y'} \end{bmatrix} & + i\Delta\beta_0^{(1)} \hat{\sigma} \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} E''_{x'} \\ E''_{y'} \end{bmatrix} - \frac{\beta_0^{(2)}}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \begin{bmatrix} E''_{x'} \\ E''_{y'} \end{bmatrix} \\
& + \frac{5}{6}\gamma(|E''_{x'}|^2 + |E''_{y'}|^2) \begin{bmatrix} E''_{x'} \\ E''_{y'} \end{bmatrix} \\
& + \frac{\gamma}{6} \left([(E''_{x'})^*, (E''_{y'})^*] \hat{\sigma} \begin{bmatrix} E''_{x'} \\ E''_{y'} \end{bmatrix} \right) \hat{\sigma} \begin{bmatrix} E''_{x'} \\ E''_{y'} \end{bmatrix} = 0
\end{aligned} \tag{2.57}$$

と書くことができる。偏波状態がポアンカレ球面上を均一に巡るとして、式 (2.54)、(2.55) を平均化する。すなわち、式 (2.54)、(2.55) に

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi [(2.54) \text{ or } (2.55)] \sin(\theta') d\theta' d\phi = 0 \tag{2.58}$$

の積分演算を施すと、(2.54)、(2.55) は

$$\begin{aligned}
i\frac{\partial E''_{x'}}{\partial z} & + i\Delta\beta_0^{(1)} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos(\theta') \sin(\theta') d\theta' \frac{\partial E''_{x'}}{\partial t} - \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \sin^2(\theta') d\theta' \int_0^{2\pi} e^{i\phi} d\phi \frac{\partial E''_{y'}}{\partial t} \right\} \\
& - \frac{\beta_0^{(2)}}{2} \frac{\partial^2 E''_{x'}}{\partial t^2} + \frac{5}{6}\gamma(|E''_{x'}|^2 + |E''_{y'}|^2)E''_{x'} \\
& + \frac{\gamma}{6} \left[\frac{1}{2} \int_0^\pi \sin(\theta') \cos^2(\theta') d\theta' (|E''_{x'}|^2 - |E''_{y'}|^2)E''_{x'} \right. \\
& \left. - \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \sin^2(\theta') \cos(\theta') d\theta' \left(\int_0^{2\pi} e^{-i\phi} d\phi (E''_{x'})^2(E''_{y'})^* + \int_0^{2\pi} e^{i\phi} d\phi |E''_{x'}|^2 E''_{y'} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \sin^2(\theta') \cos(\theta') d\theta' \int_0^{2\pi} e^{i\phi} d\phi (|E_{x'}''|^2 - |E_{y'}''|^2) E_{y'}'' \\
& + \frac{1}{2} \int_0^\pi \sin^3(\theta') d\theta' \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i2\phi} d\phi (E_{y'}'')^2 (E_{x'}'')^* + |E_{y'}''|^2 E_{x'}'' \right) \Big] = 0 \quad (2.59)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
i \frac{\partial E_{y'}''}{\partial z} & - i\Delta\beta_0^{(1)} \left\{ \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \sin^2(\theta') d\theta' \int_0^{2\pi} e^{-i\phi} d\phi \frac{\partial E_{x'}''}{\partial t} + \frac{1}{2} \int_0^\pi \sin(\theta') \cos(\theta') d\theta' \frac{\partial E_{y'}''}{\partial t} \right\} \\
& - \frac{\beta_0^{(2)}}{2} \frac{\partial^2 E_{y'}''}{\partial t^2} + \frac{5}{6} \gamma (|E_{x'}''|^2 + |E_{y'}''|^2) E_{y'}'' \\
& - \frac{\gamma}{6} \left[\frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \sin^2(\theta') \cos(\theta') d\theta' \int_0^{2\pi} e^{-i\phi} d\phi (|E_{x'}''|^2 - |E_{y'}''|^2) E_{x'}'' \right. \\
& \quad - \frac{1}{2} \int_0^\pi \sin^3(\theta') d\theta' \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i2\phi} d\phi (E_{x'}'')^2 (E_{y'}'')^* + |E_{x'}''|^2 E_{y'}'' \right) \\
& \quad + \frac{1}{2} \int_0^\pi \sin(\theta') \cos^2(\theta') d\theta' (|E_{x'}''|^2 - |E_{y'}''|^2) E_{y'}'' \\
& \quad \left. - \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \sin^2(\theta') \cos(\theta') d\theta' \left(\int_0^{2\pi} e^{i\phi} d\phi (E_{y'}'')^2 (E_{x'}'')^* \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \int_0^{2\pi} e^{-i\phi} d\phi |E_{y'}''|^2 E_{x'}'' \right) \right] = 0 \quad (2.60)
\end{aligned}$$

となる。ところで、

$$\int_0^\pi \sin(\theta') \cos(\theta') d\theta' = \frac{1}{2} \int_0^\pi \sin(2\theta') d\theta' = 0 \quad (2.61)$$

$$\int_0^\pi \sin^2(\theta') d\theta' = \frac{1}{2} \int_0^\pi \{1 - \cos(2\theta')\} d\theta' = \frac{\pi}{2} \quad (2.62)$$

$$\int_0^\pi \sin(\theta') \cos^2(\theta') d\theta' = \frac{1}{4} \int_0^\pi \{\sin(\theta') + \sin(3\theta')\} d\theta' = \frac{2}{3} \quad (2.63)$$

$$\int_0^\pi \sin^2(\theta') \cos(\theta') d\theta' = \frac{1}{4} \int_0^\pi \{\cos(\theta') - \cos(3\theta')\} d\theta' = 0 \quad (2.64)$$

$$\int_0^\pi \sin^3(\theta') d\theta' = \frac{1}{4} \int_0^\pi \{3\sin(\theta') - \sin(3\theta')\} d\theta' = \frac{4}{3} \quad (2.65)$$

であり、また、正の整数 m について

$$\int_0^{2\pi} e^{\pm im\phi} d\phi = 0 \quad (2.66)$$

である。よって、式 (2.59)、(2.60) は

$$i \frac{\partial}{\partial z} \begin{bmatrix} E_{x'}'' \\ E_{y'}'' \end{bmatrix} - \frac{\beta_0^{(2)}}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \begin{bmatrix} E_{x'}'' \\ E_{y'}'' \end{bmatrix} + \frac{8}{9} \gamma (|E_{x'}''|^2 + |E_{y'}''|^2) \begin{bmatrix} E_{x'}'' \\ E_{y'}'' \end{bmatrix} = 0 \quad (2.67)$$

となる。式 (2.67) はマナコフ方程式 (Manakov Equation)[7] と呼ばれる。ファイバの損失を考慮して、式 (2.67) の右辺に損失を表す項を加えると、

$$i \frac{\partial}{\partial z} \begin{bmatrix} E_{x'}'' \\ E_{y'}'' \end{bmatrix} - \frac{\beta_0^{(2)}}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \begin{bmatrix} E_{x'}'' \\ E_{y'}'' \end{bmatrix} + \frac{8}{9} \gamma (|E_{x'}''|^2 + |E_{y'}''|^2) \begin{bmatrix} E_{x'}'' \\ E_{y'}'' \end{bmatrix} = -i\alpha \begin{bmatrix} E_{x'}'' \\ E_{y'}'' \end{bmatrix} \quad (2.68)$$

となる。ここで、 α は式 (2.32) に示す損失係数である。式 (2.67) が2次までの分散性および非線形屈折率変化を考慮した複屈折性を有するファイバ中での光パルス伝搬を記述する方程式である。

参考文献

- [1] 北山研一編著, 光通信工学, オーム社 (2012).
- [2] Govind Agrawal, Nonlinear Fiber Optics (Fifth Edition), Academic Press (2013).
- [3] M. Matsumoto, Y. Akagi, and A. Hasegawa, “Propagation of solitons in fibers with randomly varying birefringence : effects of soliton transmission control,” IEEE/OSA J. Lightwave Technol., Vol.15, No.4, pp.584-589 (1997).
- [4] P. K. A. Wai, C. R. Menyuk, and H. H. Chen, “Stability of solitons randomly varying birefringent fibers,” Opt. Lett., Vol.16, No.16, pp.1231-1233 (1991).
- [5] C. R. Menyuk, “Nonlinear pulse propagation in birefringent optical fibers,” IEEE J. Quantum Electron., Vol.QE-23, No.2, pp.174-176 (1987).
- [6] S. G. Evangelides Jr., L. F. Mollenauer, J. P. Gordon, and N. S. Bergano, “Polarization multiplexing with solitons,” IEEE/OSA J. Lightwave Technol., Vol.10, No.1, pp.28-35 (1992).
- [7] S. V. Manakov, “On the theory of two-dimensional stationary self-focusing of electromagnetic waves,” Zh. Eksp. Teor. Fiz., Vol.65, pp.505-516 (Aug. 1973), Sov. Phys. JETP, vol.38, No.2, pp.248-253 (Feb. 1974).

第3章 無分散補償光伝送路における 非線形干渉光のガウス雑音モ デル

デジタルコヒーレント送受信機による分散補償を用いた無分散補償光伝送路において、伝送特性に非線形光学効果が及ぼす影響を評価する方法として、Poggioliniらによって提案された非線形干渉光のガウス雑音モデル [1-5] について解説する。

3.1 デジタル変復調方式の誤り率

デジタル変復調理論では、ビット誤り率 (Bit Error Rate : BER) は (電氣的) 信号対雑音比 (Electrical Signal-to-Noise Ratio : SNR) の関数として与えられる [6]。

$$\text{BER} = f(\text{SNR}) \quad (3.1)$$

関数 f の具体的な形は変復調方式を指定することによって求めることができる。また、SNR は平均信号電力 P_{ch} と自然放出光 (Amplified Spontaneous Emission : ASE) 雑音電力 P_{ASE} の比として、次式で定義される。

$$\text{SNR} = \frac{P_{\text{ch}}}{P_{\text{ASE}}} \quad (3.2)$$

ここで、平均信号電力 P_{ch} は

$$P_{\text{ch}} = \frac{P_{R_x}}{R_s} \int_{-\infty}^{\infty} |H_{R_x}(\Delta\omega)|^2 d(\Delta\omega) \quad (3.3)$$

で与えられる。ここで、 P_{R_x} はチャンネル当たりの受信光電力であり、 R_s は送信信号のシンボルレートである。 $H_{R_x}(\Delta\omega)$ はコヒーレント受信器のベースバンド伝達関数である。

一方、ASE 雑音電力 P_{ASE} は

$$P_{\text{ASE}} = \int_{-\infty}^{\infty} G_{\text{ASE}} |H_{R_x}(\Delta\omega)|^2 d(\Delta\omega) \quad (3.4)$$

で与えられる。ここで、 G_{ASE} は受信機に到達する両偏波 ASE 雑音のうち、片偏波の電力スペクトル密度 (Power Spectral Density : PSD) である。

さらに、SNR と光信号対雑音比 (Optical Signal-to-Noise Ratio : OSNR) との間には

$$\text{OSNR} = \frac{R_s}{B_n} \text{SNR} \quad (3.5)$$

の関係が成り立つ。ここで、 B_n は OSNR 帯域幅である。

変復調方式を指定して、式 (3.1) の関数 f を具体的に求めてみよう。式 (3.3) に示す平均信号電力 P_{ch} は

$$P_{\text{ch}} = \sum_{\text{全ての信号点}} (\text{各信号点の生起確率}) \times (\text{各信号点の電力}) \quad (3.6)$$

と表される。また、シンボル誤り率 (Symbol Error Rate : SER) は

$$\text{SER} = \sum_{\text{全ての信号点}} (\text{各信号点の生起確率}) \times (\text{各信号点の誤り率}) \quad (3.7)$$

と表される。以下では、コンステレーション図上で、最も近接した信号点間で生じる誤りが支配的であるとする。また、グレイ符号化された信号点配置を考え、最も近接した信号点間で生じるシンボル誤りによって、1シンボルで表されるビットのうち、1ビットのみが誤りを生じるとする。このとき、BER は

$$\text{BER} = \frac{\text{SER}}{\text{シンボル当たりのビット数}} \quad (3.8)$$

と表される。さらに、最小信号点間距離を $2a$ とし、全ての信号点の生起確率を等しいとする。コンステレーション図 ($u-v$ 平面) における ASE 雑音の I 成分、Q 成分を、それぞれの平均電力が σ^2 の独立なガウス雑音とする。このとき、ASE 雑音電力は $P_{\text{ASE}} = 2\sigma^2$ となる。また、 $u-v$ 平面上の信号点 (u_0, v_0) に、ASE 雑音が重畳した場合の、信号点と雑音の和に対する確率密度関数 $p(u, v; u_0, v_0)$ は

$$\begin{aligned} p(u, v; u_0, v_0) &= p(u; u_0) \times p(v; v_0) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(u-u_0)^2}{2\sigma^2}\right\} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(v-v_0)^2}{2\sigma^2}\right\} \end{aligned} \quad (3.9)$$

と表される。

まず、図 3.1 に信号点配置を示す BPSK 方式について考える。式 (3.6) より、平均信号電力 P_{ch} は

$$P_{\text{ch}} = \left(\frac{1}{2} \times a^2\right) \times 2 = a^2 \quad (3.10)$$

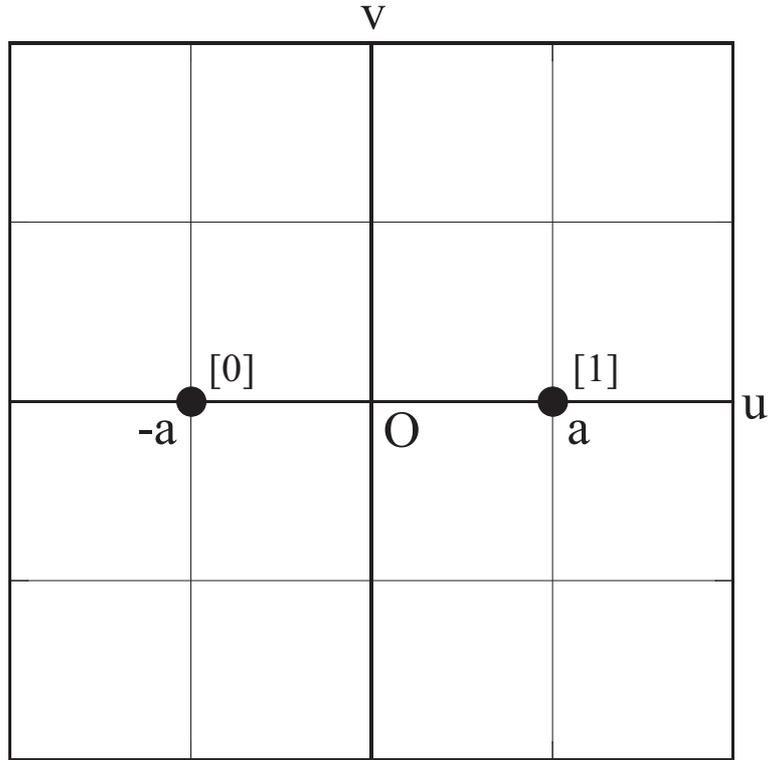


図 3.1: BPSK 方式の信号点配置

となる。よって、式 (3.2) の SNR は

$$\text{SNR} = \frac{a^2}{2\sigma^2} \quad (3.11)$$

と表される。BPSK 方式では、 $\text{BER} = \text{SER}$ である。また、2つの信号点の対称性から、 $[0] \rightarrow [1]$ 、 $[1] \rightarrow [0]$ と誤る確率は等しい。よって、BER は $(u_0, v_0) = (-a, 0)$ に配置された信号点 [0] を [1] と誤る確率に等しく、式 (3.7) より

$$\begin{aligned} \text{BER} &= \left\{ \frac{1}{2} \int_{u=0}^{\infty} \int_{v=-\infty}^{\infty} p(u, v; -a, 0) \, dudv \right\} \times 2 \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(u+a)^2}{2\sigma^2}\right\} du \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{v^2}{2\sigma^2}\right) dv \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{a/(\sqrt{2}\sigma)}^{\infty} \exp(-U^2) \, dU = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{a}{\sqrt{2}\sigma}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(\sqrt{\text{SNR}}) \quad (3.12) \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} \exp(-y^2) \, dy \quad (3.13)$$

は誤差補関数である。

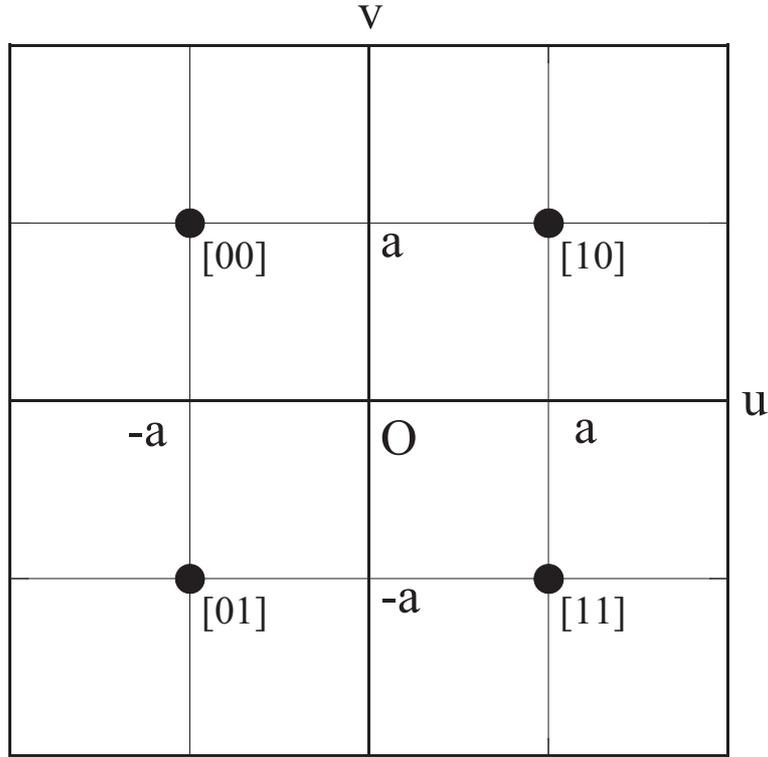


図 3.2: $\pi/4$ シフト QPSK 方式の信号点配置

次に、図3.2に信号点配置を示す $\pi/4$ -シフト QPSK 方式について考える。式 (3.6) より平均信号電力 P_{ch} は

$$P_{\text{ch}} = \left\{ \frac{1}{4} \times (\sqrt{2}a)^2 \right\} \times 4 = 2a^2 \quad (3.14)$$

となる。よって、式 (3.2) の SNR は

$$\text{SNR} = \frac{2a^2}{2\sigma^2} = \frac{a^2}{\sigma^2} \quad (3.15)$$

と表される。また、4つの信号点の対称性から、各信号点が誤る確率は全て等しい。よって、SER は $(u_0, v_0) = (-a, -a)$ に配置された信号点 [01] を、最も近接した信号点である [11] または [00] のいずれかに誤る確率に等しく、式 (3.7) より

$$\begin{aligned} \text{SER} &\simeq \left[\frac{1}{4} \left\{ \int_{u=0}^{\infty} \int_{v=-\infty}^{\infty} p(u, v; -a, -a) dudv + \int_{v=0}^{\infty} \int_{u=-\infty}^{\infty} p(u, v; -a, -a) dudv \right\} \right] \times 4 \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left\{ -\frac{(u+a)^2}{2\sigma^2} \right\} du \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left\{ -\frac{(v+a)^2}{2\sigma^2} \right\} dv \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left\{ -\frac{(u+a)^2}{2\sigma^2} \right\} du \times \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left\{ -\frac{(v+a)^2}{2\sigma^2} \right\} dv \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{a/(\sqrt{2}\sigma)}^{\infty} \exp(-U^2) dU = \operatorname{erfc} \left(\frac{a}{\sqrt{2}\sigma} \right) = \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{\operatorname{SNR}}{2}} \right) \quad (3.16)$$

となる。式(3.8)より

$$\operatorname{BER} = \frac{1}{2} \operatorname{SER} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{\operatorname{SNR}}{2}} \right) \quad (3.17)$$

となる。

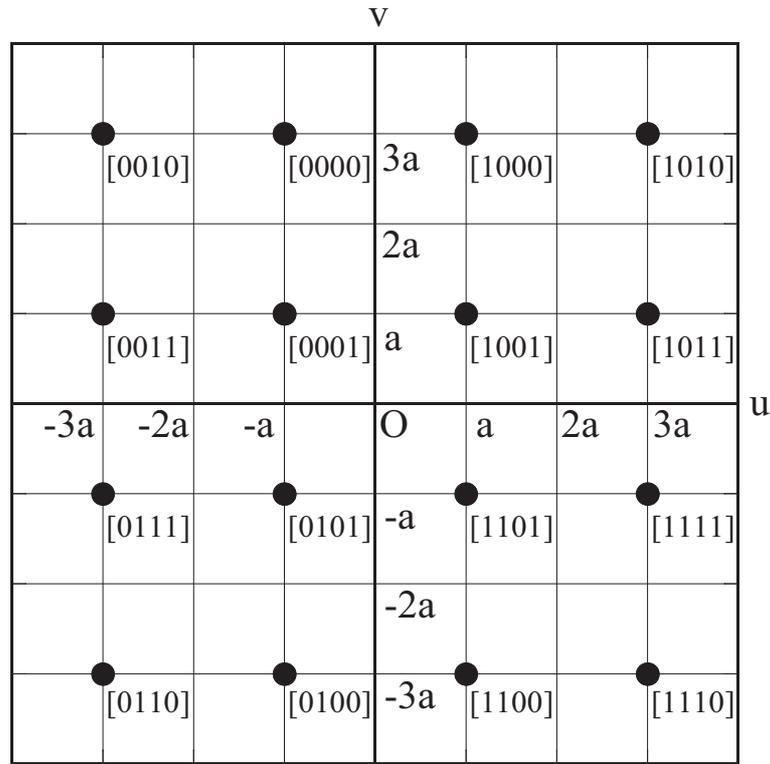


図 3.3: 16QAM 方式の信号点配置

さらに、図 3.3 に信号点配置を示す 16QAM 方式について考える。式(3.6)より、平均信号電力 P_{ch} は

$$\begin{aligned} P_{\text{ch}} &= \left\{ \frac{1}{16} \times (\sqrt{2}a)^2 \right\} \times 4 + \left\{ \frac{1}{16} \times (\sqrt{10}a)^2 \right\} \times 8 + \left\{ \frac{1}{16} \times (\sqrt{18}a)^2 \right\} \times 4 \\ &= 10a^2 \end{aligned} \quad (3.18)$$

となる。よって、式(3.2)の SNR は

$$\operatorname{SNR} = \frac{10a^2}{2\sigma^2} = \frac{5a^2}{\sigma^2} \quad (3.19)$$

と表される。また、信号点の対称性から、信号点が誤る確率は以下に示す3つのグループに分けることができる。

(i) $(u_0, v_0) = (-a, -a)$ に配置された信号点 [0101] を、最も近接した信号点である [1101] または、[0111]、[0001]、[0100] のいずれかに誤る場合

[0101] に加えて、図3.3の上下左右の四方に最近接信号点を有する [1001]、[0001]、[1101] の4つの信号点の誤り率は等しく、

$$\begin{aligned}
P_{e1} &\simeq \int_{u=0}^{\infty} \int_{v=-\infty}^{\infty} p(u, v; -a, -a) dudv + \int_{-\infty}^{u=-2a} \int_{-\infty}^{\infty} p(u, v; -a, -a) dudv \\
&+ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{v=0}^{\infty} p(u, v; -a, -a) dudv + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{v=-2a} p(u, v; -a, -a) dudv \\
&= \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(u+a)^2}{2\sigma^2}\right\} du + \int_{-\infty}^{-2a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(u+a)^2}{2\sigma^2}\right\} du \\
&+ \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(v+a)^2}{2\sigma^2}\right\} dv + \int_{-\infty}^{-2a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(v+a)^2}{2\sigma^2}\right\} dv \\
&= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_{a/(\sqrt{2}\sigma)}^{\infty} \exp(-U^2) dU = 2 \operatorname{erfc}\left(\frac{a}{\sqrt{2}\sigma}\right) \tag{3.20}
\end{aligned}$$

となる。

(ii) $(u_0, v_0) = (-a, -3a)$ に配置された信号点 [0100] を、最も近接した信号点である [1100] または、[0110]、[0101] のいずれかに誤る場合

[0100] に加えて、三方に最近接信号点を有する [1011]、[1000]、[0000]、[0011]、[0111]、[1100]、[1111] の8つの信号点の誤り率は等しく、

$$\begin{aligned}
P_{e2} &\simeq \int_{u=0}^{\infty} \int_{v=-\infty}^{\infty} p(u, v; -a, -3a) dudv + \int_{-\infty}^{u=-2a} \int_{-\infty}^{\infty} p(u, v; -a, -3a) dudv \\
&+ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{v=-2a}^{\infty} p(u, v; -a, -3a) dudv \\
&= \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(u+a)^2}{2\sigma^2}\right\} du + \int_{-\infty}^{-2a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(u+a)^2}{2\sigma^2}\right\} du \\
&+ \int_{-2a}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(v+3a)^2}{2\sigma^2}\right\} dv \\
&= \frac{3}{\sqrt{\pi}} \int_{a/(\sqrt{2}\sigma)}^{\infty} \exp(-U^2) dU = \frac{3}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{a}{\sqrt{2}\sigma}\right) \tag{3.21}
\end{aligned}$$

となる。

(iii) $(u_0, v_0) = (-3a, -3a)$ に配置された信号点 [0110] を、最も近接した信号点である [0100] または、[0111] のいずれかに誤る場合

[0110] に加えて、信号点配置の角に位置し、2つの最近接信号点を有する [1010]、

[0010]、[1110] の4つの信号点の誤り率は等しく、

$$\begin{aligned}
P_{e3} &\simeq \int_{u=-2a}^{\infty} \int_{v=-\infty}^{\infty} p(u, v; -3a, -3a) dudv + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{v=-2a}^{\infty} p(u, v; -3a, -3a) dudv \\
&= \int_{-2a}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(u+3a)^2}{2\sigma^2}\right\} du + \int_{-2a}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(v+3a)^2}{2\sigma^2}\right\} dv \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{a/(\sqrt{2}\sigma)}^{\infty} \exp(-U^2) dU = \operatorname{erfc}\left(\frac{a}{\sqrt{2}\sigma}\right) \tag{3.22}
\end{aligned}$$

となる。

式(3.20)-(3.22)を(3.7)に代入すると、

$$\begin{aligned}
\text{SER} &= \left(\frac{1}{16} \times P_{e1}\right) \times 4 + \left(\frac{1}{16} \times P_{e2}\right) \times 8 + \left(\frac{1}{16} \times P_{e3}\right) \times 4 \\
&= \frac{1}{4} \times 2 \operatorname{erfc}\left(\frac{a}{\sqrt{2}\sigma}\right) + \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{a}{\sqrt{2}\sigma}\right) + \frac{1}{4} \times \operatorname{erfc}\left(\frac{a}{\sqrt{2}\sigma}\right) \\
&= \frac{3}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{a}{\sqrt{2}\sigma}\right) \tag{3.23}
\end{aligned}$$

となる。よって、式(3.8)、(3.19)、(3.23)より

$$\text{BER} = \frac{1}{4} \text{SER} = \frac{3}{8} \operatorname{erfc}\left(\frac{a}{\sqrt{2}\sigma}\right) = \frac{3}{8} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{\text{SNR}}{10}}\right) \tag{3.24}$$

となる。

最後に、 4^m -QAM方式($m = 1, 2, \dots$)について考える。 $M = 2^{m-1}$ とおくと、式(3.6)より、平均信号電力 P_{ch} は

$$\begin{aligned}
P_s &= \frac{1}{4^{m-1}} \sum_{k=1}^M \sum_{\ell=1}^M \left[\{(2k-1)a\}^2 + \{(2\ell-1)a\}^2 \right] \\
&= \frac{2a^2}{2^{2m-2}} \sum_{k=1}^M \sum_{\ell=1}^M (2\ell^2 - 2\ell + 2k^2 - 2k + 1) \\
&= 2^{3-2m} a^2 \sum_{k=1}^M \left\{ 2 \frac{M(M+1)(2M+1)}{6} - 2 \frac{M(M+1)}{2} + (2k^2 - 2k + 1)M \right\} \\
&= 2^{3-2m} M a^2 \sum_{k=1}^M \left(2k^2 - 2k + \frac{2M^2 + 1}{3} \right) \\
&= 2^{3-2m} M a^2 \left\{ 2 \frac{M(M+1)(2M+1)}{6} - 2 \frac{M(M+1)}{2} + \frac{2M^2 + 1}{3} M \right\} \\
&= \frac{2^{3-2m} M^2 (4M^2 - 1)}{3} a^2 \\
&= \frac{2(2^{2m} - 1)}{3} a^2 \tag{3.25}
\end{aligned}$$

と表される。よって、式 (3.2) の SNR は

$$\text{SNR} = \frac{\frac{2(2^{2m} - 1)}{3}a^2}{2\sigma^2} = \frac{(2^{2m} - 1)a^2}{3\sigma^2} \quad (3.26)$$

と表される。また、信号点の対称性から、16QAM 方式の場合と同様に、信号点が誤る確率を3つのグループに分けることができる。このうち、誤り率が式 (3.20) の P_{e1} で与えられる信号点のグループには $(2^m - 2)^2$ 個の信号点が属し、式 (3.21) の P_{e2} で与えられるグループには $4(2^m - 2)$ 個の信号点が属する。また、式 (3.22) の P_{e3} で与えられるグループには 4 個の信号点が属する。式 (3.20)-(3.22) を (3.7) に代入すると、

$$\begin{aligned} \text{SER} &= \left(\frac{1}{4^m} \times P_{e1}\right) \times (2^m - 2)^2 + \left(\frac{1}{4^m} \times P_{e2}\right) \times 4(2^m - 2) \\ &+ \left(\frac{1}{4^m} \times P_{e3}\right) \times 4 \\ &= \frac{2^{2m} - 2^{m+2} + 2^2}{2^{2m}} \times 2 \operatorname{erfc}\left(\frac{a}{\sqrt{2}\sigma}\right) + \frac{2^{m+2} - 2^3}{2^{2m}} \times \frac{3}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{a}{\sqrt{2}\sigma}\right) \\ &+ \frac{2^2}{2^{2m}} \times \operatorname{erfc}\left(\frac{a}{\sqrt{2}\sigma}\right) \\ &= 2\frac{2^m - 1}{2^m} \operatorname{erfc}\left(\frac{a}{\sqrt{2}\sigma}\right) \end{aligned} \quad (3.27)$$

となる。よって、式 (3.8)、(3.26)、(3.27) より

$$\text{BER} = \frac{1}{2m} \text{SER} = \frac{2^m - 1}{m \cdot 2^m} \operatorname{erfc}\left(\frac{a}{\sqrt{2}\sigma}\right) = \frac{2^m - 1}{m \cdot 2^m} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{3 \text{SNR}}{2(2^{2m} - 1)}}}\right) \quad (3.28)$$

となる。式 (3.28) は、 $m = 1$ の場合には、(3.17) に示す $\pi/4$ -シフト QPSK 方式の BER、 $m = 2$ の場合には、(3.24) に示す 16QAM 方式の BER と一致する。

ところで、非線形干渉 (Nonlinear Interference : NLI) 雑音を ASE 雑音とは独立なガウス雑音と見なせるとすると、NLI 雑音電力 P_{NLI} を用いて、NLI 雑音を考慮した SNR は次式で与えられる。

$$\text{SNR}_{\text{NL}} = \frac{P_{\text{ch}}}{P_{\text{ASE}} + P_{\text{NLI}}} \quad (3.29)$$

ここで、

$$P_{\text{NLI}} = \int_{-\infty}^{\infty} G_{\text{NLI}}(\Delta\omega) |H_{R_x}(\Delta\omega)|^2 d(\Delta\omega) \quad (3.30)$$

であり、 $G_{\text{NLI}}(\Delta\omega)$ は NLI 雑音の PSD である。このとき、 SNR_{NL} と OSNR_{NL} との間には、式 (3.5) と同様に

$$\text{OSNR}_{\text{NL}} = \frac{R_s}{B_n} \text{SNR}_{\text{NL}} \quad (3.31)$$

の関係が成り立つ。

3.2 伝送光信号のガウス雑音近似

3.2.1 周期的複素白色ガウス雑音過程

伝送光信号のモデルとして、周期 T_0 の周期的複素白色ガウス雑音 (Periodic White Gaussian Noise : PWGN) 過程をカルネン・レーベ展開し、

$$E_{\text{PWGN}}(t) = \frac{1}{\sqrt{T_0}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi_n \exp(-in\Omega_0 t) \quad (3.32)$$

と表すことにする。ここで、 $\Omega_0 = 2\pi/T_0$ であり、 ξ_n は平均 0、分散 $\sigma_a^2 = 1$ のランダム変数である。式 (3.32) をフーリエ変換し、

$$\begin{aligned} \hat{E}_{\text{PWGN}}(\Delta\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} E_{\text{PWGN}}(t) \exp(i\Delta\omega t) dt \\ &= \frac{\sqrt{\Omega_0}}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi_n \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{i(\Delta\omega - n\Omega_0)t\} dt \end{aligned} \quad (3.33)$$

を得る。ところで、ディラックのデルタ関数は、

$$\delta(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega t) dt \quad (3.34)$$

と表されることを用いると、式 (3.33) は

$$\hat{E}_{\text{PWGN}}(\Delta\omega) = \sqrt{\Omega_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi_n \delta(\Delta\omega - n\Omega_0) \quad (3.35)$$

となる。よって、PWGN の PSD は

$$\begin{aligned} \hat{G}_{\text{PWGN}}(\Delta\omega) &= \langle |\hat{E}_{\text{PWGN}}(\Delta\omega)|^2 \rangle \\ &= \left\langle \sqrt{\Omega_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \xi_m \delta(\Delta\omega - m\Omega_0) \sqrt{\Omega_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi_n \delta(\Delta\omega - n\Omega_0) \right\rangle \\ &= \Omega_0 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle \xi_m \xi_n \rangle \delta(\Delta\omega - m\Omega_0) \delta(\Delta\omega - n\Omega_0) \\ &= \Omega_0 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sigma_a^2 \delta_{nm} \delta(\Delta\omega - m\Omega_0) \delta(\Delta\omega - n\Omega_0) \\ &= \Omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\Delta\omega - n\Omega_0) \end{aligned} \quad (3.36)$$

となる。ここで、 $\langle \cdot \rangle$ は平均を表し、 δ_{nm} はクロネッカーのデルタである。

3.2.2 伝送光信号のガウス雑音近似

伝送光信号 $E_a(t)$ をガウス雑音近似でモデル化する方法を示す。 $E_a(t)$ を周期 T_0 の周期関数とし、

$$E_a(t) = q(t) \quad \text{for } 0 \leq t < T_0 \quad (3.37)$$

とする。また、 $0 \leq t < T_0$ 内では、時間波形が $s(t)$ で表されるパルスがシンボル周期 T_s 毎に M 個配置され、その振幅と位相が情報信号によって変調されているものとする。このとき、 a_m を振幅/位相変調を表す複素数として、 $q(t)$ は

$$q(t) = \sum_{m=0}^{M-1} a_m s(t - mT_s) \quad (3.38)$$

と表される。ここで、 $T_0 = MT_s$ である。

次に、 $E_a(t)$ の周波数領域における表示 $\hat{E}_a(\Delta\omega)$ を求めよう。 $E_a(t)$ は周期 T_0 の周期関数であるから、フーリエ級数展開を用いて

$$E_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q_n \exp(-in\Omega_0 t) \quad (3.39)$$

と表される。ここで、

$$q_n = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} q(t) \exp(in\Omega_0 t) dt \quad (3.40)$$

である。式 (3.39) をフーリエ変換し、(3.40) を用いると、

$$\begin{aligned} \hat{E}_a(\Delta\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} E_a(t) \exp(i\Delta\omega t) dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} q_n \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{i(\Delta\omega - n\Omega_0)t\} dt \\ &= \sqrt{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} q_n \delta(\Delta\omega - n\Omega_0) \end{aligned} \quad (3.41)$$

となる。

さらに、式 (3.40) に (3.38) を代入し、

$$\begin{aligned} q_n &= \frac{1}{T_0} \sum_{m=0}^{M-1} a_m \int_0^{T_0} s(t - mT_s) \exp(in\Omega_0 t) dt \\ &= \frac{1}{T_0} \sum_{m=0}^{M-1} a_m \exp(in\Omega_0 mT_s) \int_{-mT_s}^{T_0 - mT_s} s(\tau) \exp(in\Omega_0 \tau) d\tau \end{aligned} \quad (3.42)$$

を得る。ここで、

$$\begin{aligned} \hat{s}(n\Omega_0) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-mT_s}^{T_0 - mT_s} s(\tau) \exp(in\Omega_0 \tau) d\tau \\ &\simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \exp(in\Omega_0 \tau) d\tau \end{aligned} \quad (3.43)$$

とおき、 $\Omega_0 = 2\pi/T_0$ および $T_s = T_0/M$ を用いると、式 (3.42) は

$$q_n = \frac{\sqrt{2\pi}}{T_0} \hat{s}(n\Omega_0) \sum_{m=0}^{M-1} a_m \exp\left(i2\pi n \frac{m}{M}\right) \quad (3.44)$$

と表される。式 (3.44) を (3.41) に代入すると、

$$\hat{E}_a(\Delta\omega) = \Omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{s}(n\Omega_0) \delta(\Delta\omega - n\Omega_0) \sum_{m=0}^{M-1} a_m \exp\left(i2\pi n \frac{m}{M}\right) \quad (3.45)$$

となる。ところで、ディラックのデルタ関数の性質を考慮すると、上式において $\hat{s}(n\Omega_0) \delta(\Delta\omega - n\Omega_0)$ を $\hat{s}(\Delta\omega) \delta(\Delta\omega - n\Omega_0)$ と書き換えることができる。よって、

$$\hat{E}_a(\Delta\omega) = \Omega_0 \hat{s}(\Delta\omega) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\Delta\omega - n\Omega_0) \sum_{m=0}^{M-1} a_m \exp\left(i2\pi n \frac{m}{M}\right) \quad (3.46)$$

となる。さらに、

$$\hat{s}(\Delta\omega) = |\hat{s}(\Delta\omega)| \exp\{i\varphi_s(\Delta\omega)\} \quad (3.47)$$

において、式 (3.46) を次式のように書き換える。

$$\hat{E}_a(\Delta\omega) = \sqrt{\Omega_0} |\hat{s}(\Delta\omega)|^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \zeta_n \delta(\Delta\omega - n\Omega_0) \quad (3.48)$$

ここで、 ζ_n は次式で定義されるランダム変数である。

$$\zeta_n = \sqrt{\Omega_0} \sum_{m=0}^{M-1} a_m \exp\left[i\left\{2\pi n \frac{m}{M} + \varphi_s(n\Omega_0)\right\}\right] \quad (3.49)$$

このとき、 $\zeta_n \zeta_\ell^*$ の平均を求めると、

$$\begin{aligned} \langle \zeta_n \zeta_\ell^* \rangle &= \Omega_0 \left\langle \sum_{m_1=0}^{M-1} a_{m_1} \exp\left[i\left\{2\pi n \frac{m_1}{M} + \varphi_s(n\Omega_0)\right\}\right] \sum_{m_2=0}^{M-1} a_{m_2}^* \exp\left[-i\left\{2\pi \ell \frac{m_2}{M} + \varphi_s(\ell\Omega_0)\right\}\right] \right\rangle \\ &= \Omega_0 \exp[i\{\varphi_s(n\Omega_0) - \varphi_s(\ell\Omega_0)\}] \sum_{m_1=0}^{M-1} \sum_{m_2=0}^{M-1} \langle a_{m_1} a_{m_2}^* \rangle \exp\left(i2\pi \frac{nm_1 - \ell m_2}{M}\right) \\ &= \Omega_0 \sigma_a^2 \exp[i\{\varphi_s(n\Omega_0) - \varphi_s(\ell\Omega_0)\}] \sum_{m_1=0}^{M-1} \sum_{m_2=0}^{M-1} \delta_{m_1 m_2} \exp\left(i2\pi \frac{nm_1 - \ell m_2}{M}\right) \\ &= \Omega_0 \sigma_a^2 \exp[i\{\varphi_s(n\Omega_0) - \varphi_s(\ell\Omega_0)\}] \sum_{m=0}^{M-1} \exp\left\{i2\pi(n - \ell) \frac{m}{M}\right\} \end{aligned} \quad (3.50)$$

となる。ここで、 σ_a^2 は ガウス変数 ζ_n の分散である。また、

$$\sum_{m=0}^{M-1} \exp\left\{i2\pi(n - \ell) \frac{m}{M}\right\} = \begin{cases} 0 & \text{if } n \neq \ell \text{ and } (n - \ell) \neq kM \\ M & \text{if } (n - \ell) = pM \end{cases} \quad (3.51)$$

である。

3.2.3 伝送光信号のモデル

3.2.1 および 3.2.2 項での議論に基づいて、ガウス雑音近似を行った伝送光信号を、式 (3.35) を用いて次式で表すことにする。

$$\begin{aligned}
\hat{E}_{\text{GN}}(\Delta\omega) &= \sqrt{G_{T_x}(\Delta\omega)} \hat{E}_{\text{PWGN}}(\Delta\omega) \\
&= \sqrt{G_{T_x}(\Delta\omega)} \sqrt{\Omega_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi_n \delta(\Delta\omega - n\Omega_0) \\
&= \sqrt{\Omega_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi_n \sqrt{G_{T_x}(n\Omega_0)} \delta(\Delta\omega - n\Omega_0) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{E}_n(0) \delta(\Delta\omega - n\Omega_0) \tag{3.52}
\end{aligned}$$

ここで、

$$\hat{E}_n(0) = \xi_n \sqrt{\Omega_0 G_{T_x}(n\Omega_0)} \tag{3.53}$$

であり、 $G_{T_x}(\Delta\omega)$ は送信機における各チャネルの変調されたスペクトルの包絡線を表す。よって、送信信号の PSD は

$$\begin{aligned}
\hat{G}_{\text{GN}}(\Delta\omega) &= \langle |\hat{E}_{\text{GN}}(\Delta\omega)|^2 \rangle \\
&= \left\langle \Omega_0 G_{T_x}(\Delta\omega) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \xi_m \delta(\Delta\omega - m\Omega_0) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi_n^* \delta(\Delta\omega - n\Omega_0) \right\rangle \\
&= \Omega_0 G_{T_x}(\Delta\omega) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle \xi_m \xi_n^* \rangle \delta(\Delta\omega - m\Omega_0) \delta(\Delta\omega - n\Omega_0) \\
&= \Omega_0 G_{T_x}(\Delta\omega) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_{mn} \sigma_a^2 \delta(\Delta\omega - m\Omega_0) \delta(\Delta\omega - n\Omega_0) \\
&= \Omega_0 G_{T_x}(\Delta\omega) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\Delta\omega - n\Omega_0) \tag{3.54}
\end{aligned}$$

となる。次に、式 (3.52) を逆フーリエ変換し、

$$\begin{aligned}
E_{\text{GN}}(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{E}_{\text{GN}}(\Delta\omega) \exp(-i\Delta\omega t) d(\Delta\omega) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\hat{E}_n(0)}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\Delta\omega - n\Omega_0) \exp(-i\Delta\omega t) d(\Delta\omega) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\hat{E}_n(0)}{\sqrt{2\pi}} \exp(-in\Omega_0 t) \tag{3.55}
\end{aligned}$$

を得る。式 (3.55) を伝送路への入力波形とし、次節において、伝送路を伝搬後の電界を求めよう。

3.3 四光波混合によって発生する非線形干渉雑音

3.3.1 非縮退四光波混合モデル

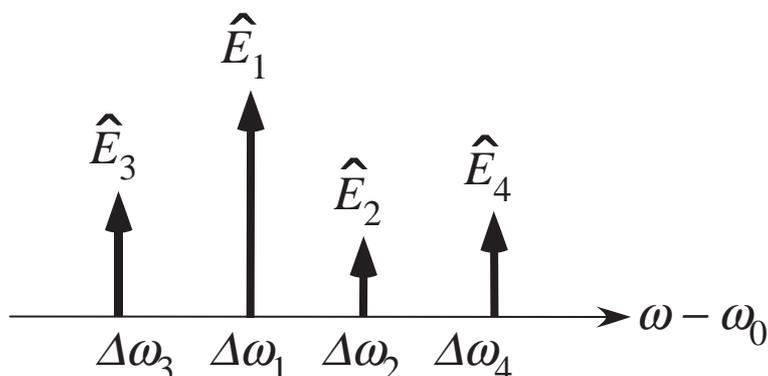


図 3.4: 非縮退四光波混合が生じる 4 つの連続光の周波数配置

簡単のために、式 (3.55) に示す離散スペクトルの中から、角周波数が異なる 4 つの連続光のみを考え、それらが同時にファイバ中を伝搬するとして、 $E(z, t)$ を次式のようにおく。

$$E(z, t) = \sum_{k=1}^4 \frac{\hat{E}_k(z)}{\sqrt{2\pi}} \exp(-i\Delta\omega_k t) \quad (3.56)$$

ここで、 $\Delta\omega_k (k = 1, 2, 3, 4)$ は角周波数 ω_k と式 (2.1) 中の基準角周波数 ω_0 との差、 $\Delta\omega_k = \omega_k - \omega_0$ である。また、周波数配置は図 3.4 に示すように以下の関係を満たすと仮定する。

$$\omega_3 + \omega_4 = \omega_1 + \omega_2 \quad (3.57)$$

このとき、 $\Delta\omega_k$ は

$$\Delta\omega_3 + \Delta\omega_4 = \Delta\omega_1 + \Delta\omega_2 \quad (3.58)$$

を満足する。以下では、 $\Delta\omega_2 + \Delta\omega_3 \neq 2\Delta\omega_1$ の場合について考える。損失項を加えた式 (2.26) に (3.56) を代入し、4 つの連続光の伝搬をそれぞれ記述する式に分離すると、

$$i \frac{d\hat{E}_1}{dz} + \Delta\beta(\Delta\omega_1)\hat{E}_1 + \frac{\gamma}{2\pi} \left\{ \left(|\hat{E}_1|^2 + 2 \sum_{i=2,3,4} |\hat{E}_i|^2 \right) \hat{E}_1 + 2\hat{E}_2^* \hat{E}_3 \hat{E}_4 \right\} = -i\alpha \hat{E}_1 \quad (3.59)$$

$$i \frac{d\hat{E}_2}{dz} + \Delta\beta(\Delta\omega_2)\hat{E}_2 + \frac{\gamma}{2\pi} \left\{ \left(|\hat{E}_2|^2 + 2 \sum_{i=1,3,4} |\hat{E}_i|^2 \right) \hat{E}_2 + 2\hat{E}_1^* \hat{E}_3 \hat{E}_4 \right\} = -i\alpha \hat{E}_2 \quad (3.60)$$

$$i \frac{d\hat{E}_3}{dz} + \Delta\beta(\Delta\omega_3)\hat{E}_3 + \frac{\gamma}{2\pi} \left\{ \left(|\hat{E}_3|^2 + 2 \sum_{i=1,2,4} |\hat{E}_i|^2 \right) \hat{E}_3 + 2\hat{E}_1 \hat{E}_2 \hat{E}_4^* \right\} = -i\alpha \hat{E}_3 \quad (3.61)$$

$$i \frac{d\hat{E}_4}{dz} + \Delta\beta(\Delta\omega_4)\hat{E}_4 + \frac{\gamma}{2\pi} \left\{ \left(|\hat{E}_4|^2 + 2 \sum_{i=1,2,3} |\hat{E}_i|^2 \right) \hat{E}_4 + 2\hat{E}_1 \hat{E}_2 \hat{E}_3^* \right\} = -i\alpha \hat{E}_4 \quad (3.62)$$

となる。ここで、

$$\Delta\beta(\Delta\omega) = \beta_0^{(1)}(\Delta\omega) + \frac{\beta_0^{(2)}}{2}(\Delta\omega)^2 + \frac{\beta_0^{(3)}}{6}(\Delta\omega)^3 \quad (3.63)$$

である。式 (3.59)-(3.62) の 4 つの式の非線形項のうち、自己位相変調 (Self Phase Modulation : SPM) および相互位相変調 (Cross Phase Modulation : XPM) を表す項を除く項が四光波混合 (Four Wave Mixing : FWM) を表す。式 (3.62) における $\gamma \hat{E}_1 \hat{E}_2 \hat{E}_3^* / \pi$ の項は、角周波数 ω_1 および ω_2 、 ω_3 の 3 つの連続光の間で生じる非線形相互作用によって、 $\omega_4 (= \omega_1 + \omega_2 - \omega_3)$ の連続光が発生することを表し、非縮退四光波混合と呼ばれている。

以下では、 \hat{E}_1 、 \hat{E}_2 、 \hat{E}_3 を同時にファイバ中に入射した場合に、非縮退四光波混合によってアイドラー光 \hat{E}_4 が発生する状況について考える。式 (3.59)~(3.61) の非線形項を無視し、さらに、式 (3.62) の SPM および XPM を表す非線形項を無視すると、式 (3.59)~(3.62) は次のように書き換えられる。

$$\frac{d\hat{E}_j}{dz} + \{\alpha - i\Delta\beta(\Delta\omega_j)\}\hat{E}_j = 0 \quad \text{for } j = 1, 2, 3 \quad (3.64)$$

$$\frac{d\hat{E}_4}{dz} + \{\alpha - i\Delta\beta(\Delta\omega_4)\}\hat{E}_4 - i\frac{\gamma}{\pi}\hat{E}_1\hat{E}_2\hat{E}_3^* = 0 \quad (3.65)$$

式 (3.64) の解は

$$\hat{E}_j(z) = \hat{E}_j(0) \exp\{[-\alpha + i\Delta\beta(\Delta\omega_j)]z\} \quad (3.66)$$

となる。式 (3.65) の解として、以下の形の解を考える。

$$\hat{E}_4(z) = \tilde{E}_4(z) \exp\{[-\alpha + i\Delta\beta(\Delta\omega_4)]z\} \quad (3.67)$$

ここで、 $\tilde{E}_4(z)$ は複素関数である。式 (3.66)、(3.67) を (3.65) に代入し、次式を得る。

$$\frac{d\tilde{E}_4}{dz} = i\frac{\gamma}{\pi}\hat{E}_1(0)\hat{E}_2(0)\hat{E}_3^*(0)\exp[(-2\alpha + i\Delta B)z] \quad (3.68)$$

ここで、 ΔB は位相不整合量であり、式 (3.63)、(3.58) より

$$\begin{aligned} \Delta B &= \Delta\beta_1 + \Delta\beta_2 - \Delta\beta_3 - \Delta\beta_4 \\ &= \beta_0^{(1)}(\Delta\omega_1 + \Delta\omega_2 - \Delta\omega_3 - \Delta\omega_4) \\ &\quad + \frac{\beta_0^{(2)}}{2}\{(\Delta\omega_1)^2 + (\Delta\omega_2)^2 - (\Delta\omega_3)^2 - (\Delta\omega_4)^2\} \\ &\quad + \frac{\beta_0^{(3)}}{6}\{(\Delta\omega_1)^3 + (\Delta\omega_2)^3 - (\Delta\omega_3)^3 - (\Delta\omega_4)^3\} \\ &= -\beta_0^{(2)}(\Delta\omega_4 - \Delta\omega_1)(\Delta\omega_4 - \Delta\omega_2) \\ &\quad - \frac{\beta_0^{(3)}}{2}(\Delta\omega_1 + \Delta\omega_2)(\Delta\omega_4 - \Delta\omega_1)(\Delta\omega_4 - \Delta\omega_2) \\ &= -(\Delta\omega_4 - \Delta\omega_1)(\Delta\omega_4 - \Delta\omega_2)\left\{\beta_0^{(2)} + \beta_0^{(3)}\frac{\Delta\omega_1 + \Delta\omega_2}{2}\right\} \end{aligned} \quad (3.69)$$

と表される。 $\tilde{E}_4(0) = 0$ として、式 (3.68) を積分し、

$$\begin{aligned} \tilde{E}_4(z) &= i\frac{\gamma}{\pi}\hat{E}_1(0)\hat{E}_2(0)\hat{E}_3^*(0)\int_0^z \exp[(-2\alpha + i\Delta B)z'] dz' \\ &= i\frac{\gamma}{\pi}\hat{E}_1(0)\hat{E}_2(0)\hat{E}_3^*(0)\frac{1 - \exp[(-2\alpha + i\Delta B)z]}{2\alpha - i\Delta B} \end{aligned} \quad (3.70)$$

を得る。式 (3.70) を (3.67) に代入すると、

$$\begin{aligned} \hat{E}_4(z) &= i\frac{\gamma}{\pi}\hat{E}_1(0)\hat{E}_2(0)\hat{E}_3^*(0)\frac{1 - \exp[(-2\alpha + i\Delta B)z]}{2\alpha - i\Delta B} \\ &\quad \times \exp\{-\alpha + i\Delta\beta(\Delta\omega_4)\}z \end{aligned} \quad (3.71)$$

となる。

3.3.2 光増幅中継系において発生する四光波混合光

光増幅器が距離 z_a 毎に配置された光増幅中継系において発生する四光波混合光について考えよう [7-9]。 N 区間の中継を考え、システム全長を Nz_a とする。また、全ての区間においてファイバは均一とし、群速度分散 $\beta_0^{(2)}$ 、3次分散 $\beta_0^{(3)}$ 、非線形係数 γ 、損失係数 α は定数とする。さらに、光増幅器は各区間の出力端の直前に配置され、その電力利得 G は距離 z_a の損失をちょうど補償する値 $G = \exp(2\alpha z_a)$ に設定されているものとする。

さて、各区間で発生する FWM 光を個別に考え、それらが残りの伝送路を線形伝搬して出力端に達するとし、出力端において、各区間で発生する FWM 光をコヒーレントに足し合わせてトータルの FWM 光を求めるものとする。

まず、 k 番目の区間の出力端における、 k 番目の区間で発生する FWM 光の電界 $\hat{E}_4^{(k)}(kz_a)$ は、式 (3.71) より

$$\begin{aligned} \hat{E}_4^{(k)}(kz_a) &= i\frac{\gamma}{\pi}\hat{E}_1[(k-1)z_a]\hat{E}_2[(k-1)z_a]\hat{E}_3^*[(k-1)z_a]\frac{1-\exp[(-2\alpha+i\Delta B)z_a]}{2\alpha-i\Delta B} \\ &\quad \times \exp[\{-\alpha+i\Delta\beta(\Delta\omega_4)\}z_a]\sqrt{G} \end{aligned} \quad (3.72)$$

となる。また、 k 番目の区間の入力端における電界 $\hat{E}_j[(k-1)z_a]$ ($j=1,2,3$) は、式 (3.66) より

$$\hat{E}_j[(k-1)z_a] = \hat{E}_j(0) \exp[i\Delta\beta(\Delta\omega_j)(k-1)z_a] \quad (3.73)$$

となる。式 (3.73) を (3.72) に代入すると、

$$\begin{aligned} \hat{E}_4^{(k)}(kz_a) &= i\frac{\gamma}{\pi}\hat{E}_1(0)\hat{E}_2(0)\hat{E}_3^*(0) \\ &\quad \times \exp[i\{\Delta\beta(\Delta\omega_1) + \Delta\beta(\Delta\omega_2) - \Delta\beta(\Delta\omega_3)\}(k-1)z_a] \\ &\quad \times \exp[i\Delta\beta(\Delta\omega_4)z_a]\frac{1-\exp[(-2\alpha+i\Delta B)z_a]}{2\alpha-i\Delta B} \\ &= i\frac{\gamma}{\pi}\hat{E}_1(0)\hat{E}_2(0)\hat{E}_3^*(0) \exp[i\{\Delta B + \Delta\beta(\Delta\omega_4)\}(k-1)z_a] \\ &\quad \times \exp[i\Delta\beta(\Delta\omega_4)z_a]\frac{1-\exp[(-2\alpha+i\Delta B)z_a]}{2\alpha-i\Delta B} \\ &= i\frac{\gamma}{\pi}\hat{E}_1(0)\hat{E}_2(0)\hat{E}_3^*(0) \exp[i\Delta B(k-1)z_a] \\ &\quad \times \exp[i\Delta\beta(\Delta\omega_4)kz_a]\frac{1-\exp[(-2\alpha+i\Delta B)z_a]}{2\alpha-i\Delta B} \end{aligned} \quad (3.74)$$

となる。 k 番目の区間で発生する FWM 光 $\hat{E}_4^{(k)}(kz_a)$ は、残りの伝送路を線形伝搬し、伝送路の出力端に達するものとする。このとき、出力端 $z = Nz_a$ における FWM 光 $\hat{E}_4^{(k)}(Nz_a)$ は、式 (3.66) より

$$\begin{aligned} \hat{E}_4^{(k)}(Nz_a) &= \hat{E}_4^{(k)}(kz_a) \exp[i\Delta\beta(\Delta\omega_4)(N-k)z_a] \\ &= i\frac{\gamma}{\pi}\hat{E}_1(0)\hat{E}_2(0)\hat{E}_3^*(0) \exp[i\Delta B(k-1)z_a] \\ &\quad \times \exp[i\Delta\beta(\Delta\omega_4)Nz_a]\frac{1-\exp[(-2\alpha+i\Delta B)z_a]}{2\alpha-i\Delta B} \end{aligned} \quad (3.75)$$

となる。式 (3.75) を k について加え合わせ、出力端 $z = Nz_a$ におけるトータルの FWM 光 $\hat{E}_4^{(\text{total})}(Nz_a)$ を求めると、

$$\hat{E}_4^{(\text{total})}(Nz_a) = \sum_{k=1}^N \hat{E}_4^{(k)}(Nz_a)$$

$$\begin{aligned}
&= i\frac{\gamma}{\pi}\widehat{E}_1(0)\widehat{E}_2(0)\widehat{E}_3^*(0)\frac{1-\exp[(-2\alpha+i\Delta B)z_a]}{2\alpha-i\Delta B} \\
&\quad \times \exp[i\Delta\beta(\Delta\omega_4)Nz_a]\sum_{k=1}^N\exp[i\Delta B(k-1)z_a] \\
&= i\frac{\gamma}{\pi}\widehat{E}_1(0)\widehat{E}_2(0)\widehat{E}_3^*(0)\frac{1-\exp[(-2\alpha+i\Delta B)z_a]}{2\alpha-i\Delta B} \\
&\quad \times \exp[i\Delta\beta(\Delta\omega_4)Nz_a]\frac{1-\exp(i\Delta BNz_a)}{1-\exp(i\Delta Bz_a)} \\
&= i\frac{\gamma}{\pi}\widehat{E}_1(0)\widehat{E}_2(0)\widehat{E}_3^*(0)\frac{1-\exp[(-2\alpha+i\Delta B)z_a]}{2\alpha-i\Delta B} \\
&\quad \times \exp\left[i\left\{\Delta\beta(\Delta\omega_4)N+\frac{\Delta B(N-1)}{2}\right\}z_a\right] \\
&\quad \times \frac{\sin\left(\frac{\Delta BNz_a}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\Delta Bz_a}{2}\right)} \tag{3.76}
\end{aligned}$$

となる。

3.4 ガウス雑音モデル

式(3.69)において、 $\Delta\omega_1 = \ell\Omega_0$, $\Delta\omega_2 = m\Omega_0$, $\Delta\omega_3 = (\ell + m - n)\Omega_0$, $\Delta\omega_4 = n\Omega_0$ とおき、 ΔB を $\Delta B_{\ell mn}$ と書き改めると、

$$\Delta B_{\ell mn} = (n - \ell)(n - m)\Omega_0^2 \left\{ \beta_0^{(2)} + \beta_0^{(3)} \frac{(\ell + m)\Omega_0}{2} \right\} \tag{3.77}$$

となる。ところで、式(3.62)の非線形項のうち、FWMを表す項 $\gamma\widehat{E}_1\widehat{E}_2\widehat{E}_3^*/\pi$ は、 $\gamma(\widehat{E}_1\widehat{E}_2 + \widehat{E}_2\widehat{E}_1)\widehat{E}_3^*/(2\pi)$ のように、 \widehat{E}_1 と \widehat{E}_2 の順序を入れ換えたものの和で表される。よって、 ℓ と m との入れ換えを別々にカウントすると、式(3.71)、(3.76)の右辺の値は半分になる。それらの式において $\widehat{E}_4(z)$ を $\widehat{E}(z, n\Omega_0)$ と書き改め、式(3.53)を代入すると、

$$\begin{aligned}
\widehat{E}(z, n\Omega_0) &= i\frac{\gamma}{2\pi}\Omega_0^{3/2}\xi_\ell\xi_m\xi_{\ell+m-n}^*\sqrt{G_{T_x}(\ell\Omega_0)G_{T_x}(m\Omega_0)G_{T_x}[(\ell+m-n)\Omega_0]} \\
&\quad \times \frac{1-\exp[(-2\alpha+i\Delta B_{\ell mn})z]}{2\alpha-i\Delta B_{\ell mn}}\exp\{[-\alpha+i\Delta\beta(n\Omega_0)]z\} \tag{3.78}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widehat{E}^{(\text{total})}(Nz_a, n\Omega_0) &= i\frac{\gamma}{2\pi}\Omega_0^{3/2}\xi_\ell\xi_m\xi_{\ell+m-n}^* \\
&\quad \times \sqrt{G_{T_x}(\ell\Omega_0)G_{T_x}(m\Omega_0)G_{T_x}[(\ell+m-n)\Omega_0]}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{1 - \exp[(-2\alpha + i\Delta B_{\ell mn})z_a]}{2\alpha - i\Delta B_{\ell mn}} \frac{\sin\left(\frac{\Delta B_{\ell mn} N z_a}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\Delta B_{\ell mn} z_a}{2}\right)} \\
& \times \exp\left[i\left\{\Delta\beta(n\Omega_0)N + \frac{\Delta B_{\ell mn}(N-1)}{2}\right\}z_a\right] \quad (3.79)
\end{aligned}$$

となる。

3.4.1 FWM 光がインコヒーレントな場合のガウス雑音モデル

単一区間 (Single Span : ss) で発生する FWM 光がインコヒーレントである場合には、全区間で発生する FWM 光は、 N 区間で発生する FWM 光電力を足し合わせるによって得られる。

光増幅中継系において、各区間の出力端の直前に配置された光増幅器の電力利得を $G = \exp(2\alpha z_a)$ とすると、単一区間で発生する非線形干渉光 $\hat{E}_{\text{NLI}}^{(\text{ss})}(z_a, \Delta\omega)$ は

$$\hat{E}_{\text{NLI}}^{(\text{ss})}(z_a, \Delta\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{E}_{\text{NLI}}^{(\text{ss})}(z_a, n\Omega_0) \sqrt{G} \delta(\Delta\omega - n\Omega_0) \quad (3.80)$$

となる。ここで、 $\hat{E}_{\text{NLI}}^{(\text{ss})}(z_a, n\Omega_0)$ は式 (3.78) より

$$\begin{aligned}
\hat{E}_{\text{NLI}}^{(\text{ss})}(z_a, n\Omega_0) &= \sum_{\ell} \sum_m \hat{E}(z_a, n\Omega_0) \\
&= i \frac{\gamma}{2\pi} \Omega_0^{3/2} \exp[\{-\alpha + i\Delta\beta(n\Omega_0)\}z_a] \sum_{\ell} \sum_m \xi_{\ell} \xi_m \xi_{\ell+m-n}^* \\
&\quad \times \sqrt{G_{T_x}(\ell\Omega_0) G_{T_x}(m\Omega_0) G_{T_x}[(\ell+m-n)\Omega_0]} \\
&\quad \times \frac{1 - \exp[-\{2\alpha - i\Delta B_{\ell mn}\}z_a]}{2\alpha - i\Delta B_{\ell mn}} \quad (3.81)
\end{aligned}$$

である。よって、NLI 電力 $\hat{P}_{\text{NLI}}^{(\text{ss})}(z_a, n\Omega_0)$ は

$$\begin{aligned}
\hat{P}_{\text{NLI}}^{(\text{ss})}(z_a, n\Omega_0) &= \langle |\hat{E}_{\text{NLI}}^{(\text{ss})}(z_a, n\Omega_0)|^2 G \rangle \\
&= \left\langle \left(\frac{\gamma}{2\pi}\right)^2 \Omega_0^3 \sum_{\ell} \sum_m \xi_{\ell} \xi_m \xi_{\ell+m-n}^* \right. \\
&\quad \times \sqrt{G_{T_x}(\ell\Omega_0) G_{T_x}(m\Omega_0) G_{T_x}[(\ell+m-n)\Omega_0]} \\
&\quad \times \frac{1 - \exp[-\{2\alpha - i\Delta B_{\ell mn}\}z_a]}{2\alpha - i\Delta B_{\ell mn}} \\
&\quad \times \sum_{\ell'} \sum_{m'} \xi_{\ell'}^* \xi_{m'}^* \xi_{\ell'+m'-n} \\
&\quad \left. \times \sqrt{G_{T_x}(\ell'\Omega_0) G_{T_x}(m'\Omega_0) G_{T_x}[(\ell'+m'-n)\Omega_0]} \right\rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{1 - \exp[-\{2\alpha + i\Delta B_{\ell'm'n}\}z_a]}{2\alpha + i\Delta B_{\ell'm'n}} \Big\rangle \\
= & \left(\frac{\gamma}{2\pi}\right)^2 \Omega_0^3 \sum_{\ell} \sum_m \sum_{\ell'} \sum_{m'} \langle \xi_{\ell} \xi_m \xi_{\ell+m-n}^* \xi_{\ell'}^* \xi_{m'}^* \xi_{\ell'+m'-n} \rangle \\
& \times \sqrt{G_{T_x}(\ell\Omega_0) G_{T_x}(m\Omega_0) G_{T_x}[(\ell+m-n)\Omega_0]} \\
& \times \sqrt{G_{T_x}(\ell'\Omega_0) G_{T_x}(m'\Omega_0) G_{T_x}[(\ell'+m'-n)\Omega_0]} \\
& \times \frac{1 - \exp[-\{2\alpha - i\Delta B_{\ell mn}\}z_a]}{2\alpha - i\Delta B_{\ell mn}} \\
& \times \frac{1 - \exp[-\{2\alpha + i\Delta B_{\ell'm'n}\}z_a]}{2\alpha + i\Delta B_{\ell'm'n}} \\
= & \left(\frac{\gamma}{2\pi}\right)^2 \Omega_0^3 \sum_{\ell} \sum_{\ell'} \langle \xi_{\ell} \xi_{\ell'}^* \rangle \sum_m \sum_{m'} \langle \xi_m \xi_{m'}^* \rangle \langle \xi_{\ell+m-n}^* \xi_{\ell'+m'-n} \rangle \\
& \times \sqrt{G_{T_x}(\ell\Omega_0) G_{T_x}(m\Omega_0) G_{T_x}[(\ell+m-n)\Omega_0]} \\
& \times \sqrt{G_{T_x}(\ell'\Omega_0) G_{T_x}(m'\Omega_0) G_{T_x}[(\ell'+m'-n)\Omega_0]} \\
& \times \frac{1 - \exp[-\{2\alpha - i\Delta B_{\ell mn}\}z_a]}{2\alpha - i\Delta B_{\ell mn}} \\
& \times \frac{1 - \exp[-\{2\alpha + i\Delta B_{\ell'm'n}\}z_a]}{2\alpha + i\Delta B_{\ell'm'n}} \\
= & \left(\frac{\gamma}{\pi}\right)^2 \Omega_0^3 \sum_{\ell} \sum_m G_{T_x}(\ell\Omega_0) G_{T_x}(m\Omega_0) G_{T_x}[(\ell+m-n)\Omega_0] \\
& \times \frac{1 - 2\exp(-2\alpha z_a) \cos(\Delta B_{\ell mn} z_a) + \exp(-4\alpha z_a)}{4\alpha^2 + (\Delta B_{\ell mn})^2} \quad (3.82)
\end{aligned}$$

となる。以上では、単一偏波の電界について考えてきたが、偏波多重の場合を考えると、式(2.41)および(2.67)より

$$\begin{aligned}
\hat{P}_{\text{NLI}}^{(\text{ss})}(z_a, n\Omega_0) &= \frac{8}{27} \langle |\hat{E}_{\text{NLI}}^{(\text{ss})}(z_a, n\Omega_0)|^2 \rangle \\
&= \frac{8}{27} \left(\frac{\gamma}{2\pi}\right)^2 \Omega_0^3 \sum_{\ell} \sum_m G_{T_x}(\ell\Omega_0) G_{T_x}(m\Omega_0) G_{T_x}[(\ell+m-n)\Omega_0] \\
& \times \frac{1 - 2\exp(-2\alpha z_a) \cos(\Delta B_{\ell mn} z_a) + \exp(-4\alpha z_a)}{4\alpha^2 + (\Delta B_{\ell mn})^2} \quad (3.83)
\end{aligned}$$

となる。よって、伝送路の出力端に達する NLI 電力 $\hat{P}_{\text{NLI}}(Nz_a, n\Omega_0)$ は

$$\begin{aligned}
\hat{P}_{\text{NLI}}(Nz_a, n\Omega_0) &= N \hat{P}_{\text{NLI}}^{(\text{ss})}(z_a, n\Omega_0) \\
&= \frac{2}{27} \left(\frac{\gamma}{\pi}\right)^2 N \Omega_0^3 \sum_{\ell} \sum_m G_{T_x}(\ell\Omega_0) G_{T_x}(m\Omega_0) G_{T_x}[(\ell+m-n)\Omega_0] \\
& \times \frac{1 - 2\exp(-2\alpha z_a) \cos(\Delta B_{\ell mn} z_a) + \exp(-4\alpha z_a)}{4\alpha^2 + (\Delta B_{\ell mn})^2} \quad (3.84)
\end{aligned}$$

となる。

3.4.2 FWM 光がコヒーレントな場合のガウス雑音モデル

各区間で発生する FWM 光がコヒーレントである場合の、出力端 $z = Nz_a$ におけるトータルの非線形干渉光 $\hat{E}_{\text{NLI}}^{(\text{total})}(Nz_a, \Delta\omega)$ は

$$\hat{E}_{\text{NLI}}^{(\text{total})}(Nz_a, \Delta\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{E}_{\text{NLI}}^{(\text{total})}(Nz_a, n\Omega_0) \delta(\Delta\omega - n\Omega_0) \quad (3.85)$$

となる。ここで、 $\hat{E}_{\text{NLI}}^{(\text{total})}(Nz_a, n\Omega_0)$ は式 (3.79) より

$$\begin{aligned} \hat{E}_{\text{NLI}}^{(\text{total})}(Nz_a, n\Omega_0) &= \sum_{\ell} \sum_m \hat{E}^{(\text{total})}(Nz_a, n\Omega_0) \\ &= i \frac{\gamma}{2\pi} \Omega_0^{3/2} \exp[i\Delta\beta(n\Omega_0)Nz_a] \sum_{\ell} \sum_m \xi_{\ell} \xi_m \xi_{\ell+m-n}^* \\ &\quad \times \sqrt{G_{T_x}(\ell\Omega_0) G_{T_x}(m\Omega_0) G_{T_x}[(\ell+m-n)\Omega_0]} \\ &\quad \times \frac{1 - \exp[-(2\alpha - i\Delta B_{\ell mn})z_a]}{2\alpha - i\Delta B_{\ell mn}} \\ &\quad \times \frac{\sin\left(\frac{\Delta B_{\ell mn} Nz_a}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\Delta B_{\ell mn} z_a}{2}\right)} \exp\left[i\frac{\Delta B_{\ell mn}(N-1)z_a}{2}\right] \end{aligned} \quad (3.86)$$

である。よって、伝送路の出力端に達する NLI 電力 $\hat{P}_{\text{NLI}}^{(\text{total})}(Nz_a, n\Omega_0)$ は

$$\begin{aligned} \hat{P}_{\text{NLI}}^{(\text{total})}(Nz_a, n\Omega_0) &= \langle |\hat{E}_{\text{NLI}}^{(\text{total})}(Nz_a, n\Omega_0)|^2 \rangle \\ &= \left\langle \left(\frac{\gamma}{2\pi}\right)^2 \Omega_0^3 \sum_{\ell} \sum_m \xi_{\ell} \xi_m \xi_{\ell+m-n}^* \right. \\ &\quad \times \sqrt{G_{T_x}(\ell\Omega_0) G_{T_x}(m\Omega_0) G_{T_x}[(\ell+m-n)\Omega_0]} \\ &\quad \times \frac{1 - \exp[-(2\alpha - i\Delta B_{\ell mn})z_a]}{2\alpha - i\Delta B_{\ell mn}} \\ &\quad \times \frac{\sin\left(\frac{\Delta B_{\ell mn} Nz_a}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\Delta B_{\ell mn} z_a}{2}\right)} \exp\left[i\frac{\Delta B_{\ell mn}(N-1)z_a}{2}\right] \\ &\quad \times \sum_{\ell'} \sum_{m'} \xi_{\ell'}^* \xi_{m'}^* \xi_{\ell'+m'-n} \sqrt{G_{T_x}(\ell'\Omega_0) G_{T_x}(m'\Omega_0) G_{T_x}[(\ell'+m'-n)\Omega_0]} \\ &\quad \left. \times \frac{1 - \exp[-(2\alpha + i\Delta B_{\ell'm'n})z_a]}{2\alpha + i\Delta B_{\ell'm'n}} \right\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{\sin\left(\frac{\Delta B_{\ell'm'n} N z_a}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\Delta B_{\ell'm'n} z_a}{2}\right)} \exp\left[-i\frac{\Delta B_{\ell'm'n}(N-1)z_a}{2}\right] \Bigg\rangle \\
= & \left(\frac{\gamma}{2\pi}\right)^2 \Omega_0^3 \sum_{\ell} \sum_m \sum_{\ell'} \sum_{m'} \langle \xi_{\ell} \xi_m \xi_{\ell+m-n}^* \xi_{\ell'}^* \xi_{m'}^* \xi_{\ell'+m'-n} \rangle \\
& \times \sqrt{G_{T_x}(\ell\Omega_0) G_{T_x}(m\Omega_0) G_{T_x}[(\ell+m-n)\Omega_0]} \\
& \times \sqrt{G_{T_x}(\ell'\Omega_0) G_{T_x}(m'\Omega_0) G_{T_x}[(\ell'+m'-n)\Omega_0]} \\
& \times \frac{1 - \exp[-(2\alpha - i\Delta B_{\ell mn})z_a]}{2\alpha - i\Delta B_{\ell mn}} \frac{1 - \exp[-(2\alpha + i\Delta B_{\ell'm'n})z_a]}{2\alpha + i\Delta B_{\ell'm'n}} \\
& \times \frac{\sin\left(\frac{\Delta B_{\ell mn} N z_a}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\Delta B_{\ell mn} z_a}{2}\right)} \frac{\sin\left(\frac{\Delta B_{\ell'm'n} N z_a}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\Delta B_{\ell'm'n} z_a}{2}\right)} \\
& \times \exp\left[i\frac{\Delta B_{\ell mn}(N-1)z_a}{2}\right] \exp\left[-i\frac{\Delta B_{\ell'm'n}(N-1)z_a}{2}\right] \\
= & \left(\frac{\gamma}{2\pi}\right)^2 \Omega_0^3 \sum_{\ell} \sum_{\ell'} \langle \xi_{\ell} \xi_{\ell'}^* \rangle \sum_m \sum_{m'} \langle \xi_m \xi_{m'}^* \rangle \langle \xi_{\ell+m-n}^* \xi_{\ell'+m'-n} \rangle \\
& \times \sqrt{G_{T_x}(\ell\Omega_0) G_{T_x}(m\Omega_0) G_{T_x}[(\ell+m-n)\Omega_0]} \\
& \times \sqrt{G_{T_x}(\ell'\Omega_0) G_{T_x}(m'\Omega_0) G_{T_x}[(\ell'+m'-n)\Omega_0]} \\
& \times \frac{1 - \exp[-(2\alpha - i\Delta B_{\ell mn})z_a]}{2\alpha - i\Delta B_{\ell mn}} \frac{1 - \exp[-(2\alpha + i\Delta B_{\ell'm'n})z_a]}{2\alpha + i\Delta B_{\ell'm'n}} \\
& \times \frac{\sin\left(\frac{\Delta B_{\ell mn} N z_a}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\Delta B_{\ell mn} z_a}{2}\right)} \frac{\sin\left(\frac{\Delta B_{\ell'm'n} N z_a}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\Delta B_{\ell'm'n} z_a}{2}\right)} \\
& \times \exp\left[i\frac{\Delta B_{\ell mn}(N-1)z_a}{2}\right] \exp\left[-i\frac{\Delta B_{\ell'm'n}(N-1)z_a}{2}\right] \\
= & \left(\frac{\gamma}{2\pi}\right)^2 \Omega_0^3 \sum_{\ell} \sum_m G_{T_x}(\ell\Omega_0) G_{T_x}(m\Omega_0) G_{T_x}[(\ell+m-n)\Omega_0] \\
& \times \frac{1 - 2\exp(-2\alpha z_a) \cos(\Delta B_{\ell mn} z_a) + \exp(-4\alpha z_a)}{4\alpha^2 + (\Delta B_{\ell mn})^2} \\
& \times \frac{\sin^2\left(\frac{\Delta B_{\ell mn} N z_a}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\Delta B_{\ell mn} z_a}{2}\right)} \tag{3.87}
\end{aligned}$$

となる。偏波多重の場合を考えると、

$$\hat{P}_{\text{NLI}}^{(\text{total})}(N z_a, n\Omega_0) = \frac{8}{27} \langle |\hat{E}_{\text{NLI}}^{(\text{total})}(N z_a, n\Omega_0)|^2 \rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{27} \left(\frac{\gamma}{\pi}\right)^2 \Omega_0^3 \sum_{\ell} \sum_m G_{T_x}(\ell\Omega_0) G_{T_x}(m\Omega_0) G_{T_x}[(\ell+m-n)\Omega_0] \\
&\quad \times \frac{1 - 2 \exp(-2\alpha z_a) \cos(\Delta B_{\ell mn} z_a) + \exp(-4\alpha z_a)}{4\alpha^2 + (\Delta B_{\ell mn})^2} \\
&\quad \times \frac{\sin^2\left(\frac{\Delta B_{\ell mn} N z_a}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\Delta B_{\ell mn} z_a}{2}\right)} \tag{3.88}
\end{aligned}$$

となる。

3.5 非線形干渉雑音の電力スペクトル密度

任意の関数 $\hat{f}(\Delta\omega)$ について、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\Delta\omega) d(\Delta\omega) = \lim_{\Omega_0 \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Omega_0 \hat{f}(n\Omega_0) \tag{3.89}$$

が成り立つので、式(3.84)において、 $\Omega_0 \rightarrow 0$ ($T_0 \rightarrow \infty$) とし、 $\ell\Omega_0 = \Delta\omega_1$ 、 $m\Omega_0 = \Delta\omega_2$ 、 $n\Omega_0 = \Delta\omega$ とおくと、

$$\begin{aligned}
G_{\text{NLI}}(Nz_a, \Delta\omega) &= \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \Omega_0 \hat{P}_{\text{NLI}}(Nz_a, n\Omega_0) \\
&= \frac{2}{27} \left(\frac{\gamma}{\pi}\right)^2 N \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G_{T_x}(\Delta\omega_1) G_{T_x}(\Delta\omega_2) G_{T_x}(\Delta\omega_1 + \Delta\omega_2 - \Delta\omega) \\
&\quad \times \frac{1 - 2 \exp(-2\alpha z_a) \cos(\Delta B z_a) + \exp(-4\alpha z_a)}{4\alpha^2 + (\Delta B)^2} d(\Delta\omega_1) d(\Delta\omega_2) \tag{3.90}
\end{aligned}$$

となる。また、式(3.88)より

$$\begin{aligned}
G_{\text{NLI}}^{(\text{total})}(Nz_a, \Delta\omega) &= \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \Omega_0 \hat{P}_{\text{NLI}}^{(\text{total})}(Nz_a, n\Omega_0) \\
&= \frac{2}{27} \left(\frac{\gamma}{\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G_{T_x}(\Delta\omega_1) G_{T_x}(\Delta\omega_2) G_{T_x}(\Delta\omega_1 + \Delta\omega_2 - \Delta\omega) \\
&\quad \times \frac{1 - 2 \exp(-2\alpha z_a) \cos(\Delta B z_a) + \exp(-4\alpha z_a)}{4\alpha^2 + (\Delta B)^2} \\
&\quad \times \frac{\sin^2\left(\frac{\Delta B N z_a}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\Delta B z_a}{2}\right)} d(\Delta\omega_1) d(\Delta\omega_2) \tag{3.91}
\end{aligned}$$

となる。式(3.90)および(3.91)における ΔB は(3.69)において $\Delta\omega_4$ を $\Delta\omega$ に置き換えた式で与えられる。

3.6 ナイキスト限界

ナイキスト WDM 伝送の場合について考える。この場合、シンボルレート R_s はチャンネル当たりの帯域幅 B_{ch} に等しく、 $G_{T_x}(\Delta\omega)$ が

$$G_{T_x}(\Delta\omega) = \begin{cases} G_{\text{WDM}} & |\Delta\omega| \leq \pi B_{\text{WDM}} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3.92)$$

で与えられるとする。ここで、 G_{WDM} および B_{WDM} はそれぞれナイキスト WDM 信号の送信電力スペクトル密度および全帯域幅である。このとき、式 (3.90) において $\Delta\omega = 0$ とおくと、

$$\begin{aligned} G_{\text{NLI}}(Nz_a, 0) &= \frac{2}{27} \left(\frac{\gamma}{\pi}\right)^2 N G_{\text{WDM}}^3 \int \int_{\mathcal{D}} d(\Delta\omega_1) d(\Delta\omega_2) \\ &\times \frac{1 - 2 \exp(-2\alpha z_a) \cos\{|\beta_0^{(2)}|(\Delta\omega_1)(\Delta\omega_2)z_a\} + \exp(-4\alpha z_a)}{4\alpha^2 + \{|\beta_0^{(2)}|(\Delta\omega_1)(\Delta\omega_2)\}^2} \end{aligned} \quad (3.93)$$

となる。ここで、式 (3.69) において 3 次分散 $\beta_0^{(3)} = 0$ とした。このとき、式 (3.92) より、積分領域 \mathcal{D} は $\Delta\omega_1 - \Delta\omega_2$ 平面において、次式を満足する領域で与えられる。

$$-\pi B_{\text{WDM}} \leq \Delta\omega_1, \Delta\omega_2, \Delta\omega_1 + \Delta\omega_2 \leq \pi B_{\text{WDM}} \quad (3.94)$$

積分領域 \mathcal{D} を図 3.5 に示す。しかし、領域 \mathcal{D} での積分を解析的に求めることは困難である。そこで、積分領域を図 3.5 に点線で示す半径 πB_{WDM} の円領域 \mathcal{C} で近似する。また、被積分関数の分子を以下のように近似する。

$$\begin{aligned} &1 - 2 \exp(-2\alpha z_a) \cos\{|\beta_0^{(2)}|(\Delta\omega_1)(\Delta\omega_2)z_a\} + \exp(-4\alpha z_a) \\ &= 1 - 2 \exp(-2\alpha z_a) \left[1 - 2 \sin^2 \left\{ \frac{|\beta_0^{(2)}|(\Delta\omega_1)(\Delta\omega_2)z_a}{2} \right\} \right] + \exp(-4\alpha z_a) \\ &= 1 - 2 \exp(-2\alpha z_a) + \exp(-4\alpha z_a) + 4 \exp(-2\alpha z_a) \sin^2 \left\{ \frac{|\beta_0^{(2)}|(\Delta\omega_1)(\Delta\omega_2)z_a}{2} \right\} \\ &= \{1 - \exp(-2\alpha z_a)\}^2 + 4 \exp(-2\alpha z_a) \sin^2 \left\{ \frac{|\beta_0^{(2)}|(\Delta\omega_1)(\Delta\omega_2)z_a}{2} \right\} \\ &\simeq \{1 - \exp(-2\alpha z_a)\}^2 \end{aligned} \quad (3.95)$$

さらに、光増幅器間隔の実効長 L_{eff} および漸近の実効長 $L_{\text{eff,a}}$ をそれぞれ次式で定義する。

$$L_{\text{eff}} = \int_0^{z_a} \exp(-2\alpha z) dz = \frac{1 - \exp(-2\alpha z_a)}{2\alpha} \quad (3.96)$$

$$L_{\text{eff,a}} = \lim_{z_a \rightarrow \infty} L_{\text{eff}} = \frac{1}{2\alpha} \quad (3.97)$$

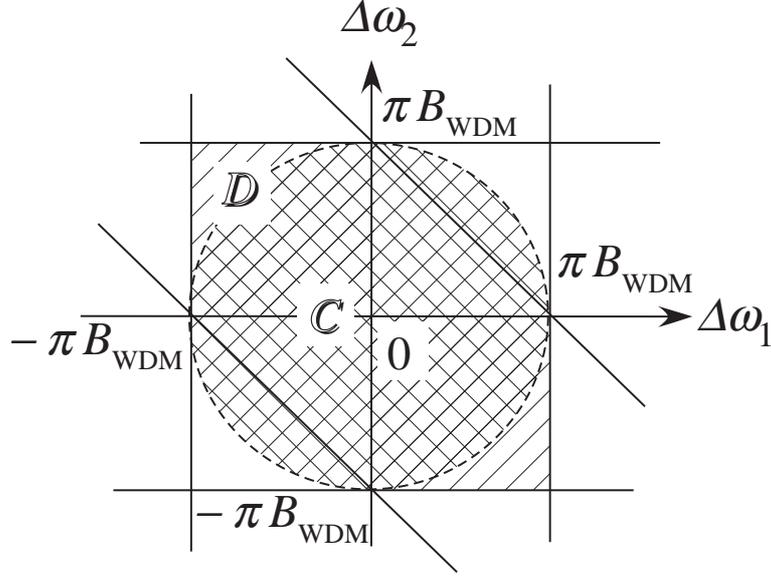


図 3.5: 積分領域 D と近似積分領域 C

式 (3.95)~(3.97) を用いると、(3.93) は

$$G_{\text{NLI}}(Nz_a, 0) = \frac{2}{27} \left(\frac{\gamma}{\pi}\right)^2 NG_{\text{WDM}}^3 \int \int_C d(\Delta\omega_1) d(\Delta\omega_2) \times \frac{L_{\text{eff}}^2}{1 + \{|\beta_0^{(2)}|(\Delta\omega_1)(\Delta\omega_2)L_{\text{eff},a}\}^2} \quad (3.98)$$

となる。次に、円領域 C での積分を行うために、変数変換を行う。

$$\begin{cases} \Delta\omega_1 = r \cos \varphi \\ \Delta\omega_2 = r \sin \varphi \end{cases} \quad (3.99)$$

とにおいて、式 (3.98) を書き換えると、

$$G_{\text{NLI}}(Nz_a, 0) = \frac{2}{27} \left(\frac{\gamma}{\pi}\right)^2 NG_{\text{WDM}}^3 L_{\text{eff}}^2 \times \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi B_{\text{WDM}}} \frac{r}{1 + (|\beta_0^{(2)}|L_{\text{eff},a})^2 r^4 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi} dr d\varphi \quad (3.100)$$

となる。式 (3.100) において、 φ についての積分を、 $z = \exp(i\varphi)$ とにおいて図 3.6 に示す複素平面の原点を中心とする $|z| = 1$ の単位円 C 上の積分に置き換えると、

$$I_\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{r}{1 + (|\beta_0^{(2)}|L_{\text{eff},a})^2 r^4 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi} d\varphi$$

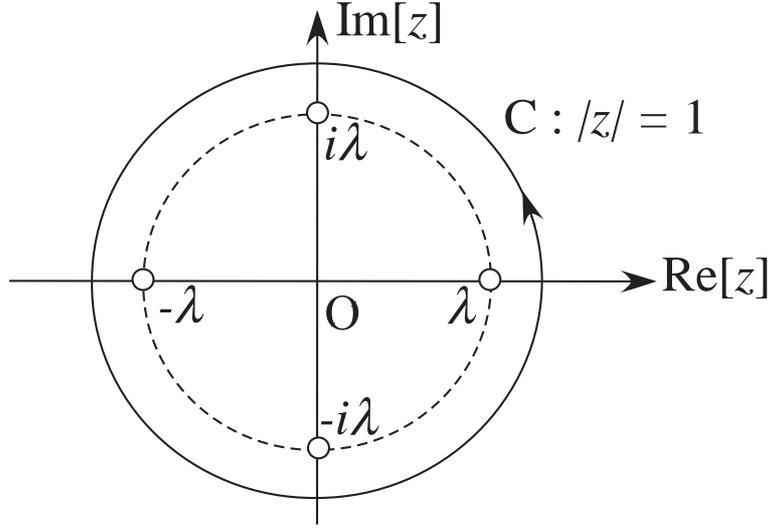


図 3.6: 単位円 C 上の積分と 4 つの 1 位の極

$$\begin{aligned}
&= r \int_C \frac{1}{1 + (|\beta_0^{(2)}| L_{\text{eff},a} r^2)^2 \left\{ \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \right\}^2 \left\{ \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right) \right\}^2} \frac{dz}{iz} \\
&= i \frac{16r}{(|\beta_0^{(2)}| L_{\text{eff},a} r^2)^2} \int_C \frac{z^3}{\left(z^4 + \frac{4}{|\beta_0^{(2)}| L_{\text{eff},a} r^2} z^2 - 1 \right) \left(z^4 - \frac{4}{|\beta_0^{(2)}| L_{\text{eff},a} r^2} z^2 - 1 \right)} dz
\end{aligned} \tag{3.101}$$

となる。このとき、式 (3.101) の被積分関数は C 内に 4 つの 1 位の極

$$z = \pm\lambda, \pm i\lambda, \quad \lambda = \sqrt{\sqrt{\left(\frac{2}{|\beta_0^{(2)}| L_{\text{eff},a} r^2} \right)^2 + 1} - \frac{2}{|\beta_0^{(2)}| L_{\text{eff},a} r^2}} \tag{3.102}$$

を持つ。よって、式 (3.101) は

$$I_\varphi = i \frac{16r}{(|\beta_0^{(2)}| L_{\text{eff},a} r^2)^2} \int_C f(z) dz \tag{3.103}$$

と表すことができる。ここで、

$$f(z) = \frac{z^3}{(z - \lambda)(z + \lambda)(z - i\lambda)(z + i\lambda) \left[z^4 - \left\{ \sqrt{\left(\frac{2}{|\beta_0^{(2)}| L_{\text{eff},a} r^2} \right)^2 + 1} + \frac{2}{|\beta_0^{(2)}| L_{\text{eff},a} r^2} \right\}^2 \right]} \tag{3.104}$$

である。式 (3.103) の複素積分は

$$I_\varphi = i \frac{16r}{(|\beta_0^{(2)}|L_{\text{eff},a}r^2)^2} \times (2i\pi) \{ \text{Res}[f(z), \lambda] + \text{Res}[f(z), -\lambda] + \text{Res}[f(z), i\lambda] + \text{Res}[f(z), -i\lambda] \} \quad (3.105)$$

となる。ところで、

$$\begin{aligned} & \text{Res}[f(z), \lambda] = \text{Res}[f(z), -\lambda] = \text{Res}[f(z), i\lambda] = \text{Res}[f(z), -i\lambda] \\ &= \frac{\lambda^3}{(\lambda + \lambda)(\lambda - i\lambda)(\lambda + i\lambda) \left[\lambda^4 - \left\{ \sqrt{\left(\frac{2}{|\beta_0^{(2)}|L_{\text{eff},a}r^2} \right)^2 + 1} + \frac{2}{|\beta_0^{(2)}|L_{\text{eff},a}r^2} \right\}^2 \right]} \\ &= \frac{1}{4 \left[\left\{ \sqrt{\left(\frac{2}{|\beta_0^{(2)}|L_{\text{eff},a}r^2} \right)^2 + 1} - \frac{2}{|\beta_0^{(2)}|L_{\text{eff},a}r^2} \right\}^2 - \left\{ \sqrt{\left(\frac{2}{|\beta_0^{(2)}|L_{\text{eff},a}r^2} \right)^2 + 1} + \frac{2}{|\beta_0^{(2)}|L_{\text{eff},a}r^2} \right\}^2 \right]} \\ &= -\frac{|\beta_0^{(2)}|L_{\text{eff},a}r^2}{32 \sqrt{\left(\frac{2}{|\beta_0^{(2)}|L_{\text{eff},a}r^2} \right)^2 + 1}} = -\frac{(|\beta_0^{(2)}|L_{\text{eff},a}r^2)^2}{64 \sqrt{1 + \left(\frac{|\beta_0^{(2)}|L_{\text{eff},a}r^2}{2} \right)^2}} \end{aligned} \quad (3.106)$$

であるので、式 (3.103) の複素積分は

$$I_\varphi = \frac{32\pi r}{(|\beta_0^{(2)}|L_{\text{eff},a}r^2)^2} \times 4 \times \frac{(|\beta_0^{(2)}|L_{\text{eff},a}r^2)^2}{64 \sqrt{1 + \left(\frac{|\beta_0^{(2)}|L_{\text{eff},a}r^2}{2} \right)^2}} = \frac{2\pi r}{\sqrt{1 + \left(\frac{|\beta_0^{(2)}|L_{\text{eff},a}r^2}{2} \right)^2}} \quad (3.107)$$

となる。式 (3.107) を (3.100) に代入し、

$$G_{\text{NLI}}(Nz_a, 0) = \frac{2}{27} \left(\frac{\gamma}{\pi} \right)^2 NG_{\text{WDM}}^3 L_{\text{eff}}^2 \int_0^{\pi B_{\text{WDM}}} \frac{2\pi r}{\sqrt{1 + \left(\frac{|\beta_0^{(2)}|L_{\text{eff},a}r^2}{2} \right)^2}} dr \quad (3.108)$$

を得る。さらに、 $R = |\beta_0^{(2)}|L_{\text{eff},a}r^2/2$ において変数変換して積分を行うと、

$$\begin{aligned} G_{\text{NLI}}(Nz_a, 0) &= \frac{2}{27} \left(\frac{\gamma}{\pi} \right)^2 NG_{\text{WDM}}^3 L_{\text{eff}}^2 \int_0^{\pi^2 |\beta_0^{(2)}|L_{\text{eff},a}B_{\text{WDM}}^2/2} \frac{2\pi}{\sqrt{1 + R^2}} \frac{dR}{|\beta_0^{(2)}|L_{\text{eff},a}} \\ &= \frac{4}{27} \frac{\gamma^2 NG_{\text{WDM}}^3 L_{\text{eff}}^2}{\pi |\beta_0^{(2)}|L_{\text{eff},a}} \left[\sinh^{-1} R \right]_0^{\pi^2 |\beta_0^{(2)}|L_{\text{eff},a}B_{\text{WDM}}^2/2} \\ &= \frac{4}{27} \frac{\gamma^2 NG_{\text{WDM}}^3 L_{\text{eff}}^2}{\pi |\beta_0^{(2)}|L_{\text{eff},a}} \sinh^{-1} \left(\frac{\pi^2 |\beta_0^{(2)}|L_{\text{eff},a}B_{\text{WDM}}^2}{2} \right) \end{aligned} \quad (3.109)$$

となる。ところで、 $x \gg 1$ に対して、

$$\sinh^{-1}(x) = \log_e(x + \sqrt{x^2 + 1}) \simeq \log_e(2x) \quad (3.110)$$

が成り立つ。式 (3.110) の近似を (3.109) に適用すると、

$$G_{\text{NLI}}(Nz_a, 0) \simeq \frac{4}{27} \frac{\gamma^2 N G_{\text{WDM}}^3 L_{\text{eff}}^2}{\pi |\beta_0^{(2)}| L_{\text{eff},a}} \log_e(\pi^2 |\beta_0^{(2)}| L_{\text{eff},a} B_{\text{WDM}}^2) \quad (3.111)$$

となる。式 (3.30) より、NLI 雑音電力 P_{NLI} は

$$P_{\text{NLI}}(Nz_a) = \int_{-\infty}^{\infty} G_{\text{NLI}}(Nz_a, \Delta\omega) |H_{R_x}(\Delta\omega)|^2 d(\Delta\omega) \quad (3.112)$$

で与えられる。 $G_{\text{NLI}}(Nz_a, \Delta\omega) \simeq G_{\text{NLI}}(Nz_a, 0)$ とし、さらに、受信器の帯域幅を OSNR 帯域幅 B_n と等しいとして、 $H_{R_x}(\Delta\omega)$ を

$$H_{R_x}(\Delta\omega) = \begin{cases} 1 & |\Delta\omega| \leq \pi B_n \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3.113)$$

とすると、

$$\begin{aligned} P_{\text{NLI}}(Nz_a) &\simeq 2\pi B_n G_{\text{NLI}}(Nz_a, 0) \\ &= \frac{8}{27} \frac{\gamma^2 N G_{\text{WDM}}^3 L_{\text{eff}}^2 B_n}{|\beta_0^{(2)}| L_{\text{eff},a}} \log_e(\pi^2 |\beta_0^{(2)}| L_{\text{eff},a} B_{\text{WDM}}^2) \end{aligned} \quad (3.114)$$

となる。さらに、 $L_{\text{eff},a} \sim L_{\text{eff}}$ とおくと、

$$P_{\text{NLI}}(Nz_a) \simeq \left(\frac{2}{3}\right)^3 \frac{\gamma^2 N G_{\text{WDM}}^3 L_{\text{eff}} B_n}{|\beta_0^{(2)}|} \log_e(\pi^2 |\beta_0^{(2)}| L_{\text{eff}} B_{\text{WDM}}^2) \quad (3.115)$$

となる。WDM 信号のチャンネル数を N_{ch} 、チャンネル当たりの送信電力を P_{ch} とすると、WDM 信号の全帯域幅 B_{WDM} 、送信電力スペクトル密度 G_{WDM} 、全送信電力 P_{WDM} はそれぞれ

$$B_{\text{WDM}} = N_{\text{ch}} B_{\text{ch}} = N_{\text{ch}} R_s \quad (3.116)$$

$$G_{\text{WDM}} = \frac{P_{\text{ch}}}{B_{\text{ch}}} = \frac{P_{\text{ch}}}{R_s} \quad (3.117)$$

$$P_{\text{WDM}} = N_{\text{ch}} P_{\text{ch}} = G_{\text{WDM}} B_{\text{WDM}} \quad (3.118)$$

と表される。これらを式 (3.115) に代入し、

$$P_{\text{NLI}}(Nz_a) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \frac{\gamma^2 N P_{\text{ch}}^3 L_{\text{eff}} B_n}{|\beta_0^{(2)}| R_s^3} \log_e(\pi^2 |\beta_0^{(2)}| L_{\text{eff}} N_{\text{ch}}^2 R_s^2) \quad (3.119)$$

を得る。

3.7 伝送システム評価および設計への適用

式(3.119)を、ナイキスト WDM 伝送システムの評価および設計に適用することを考えよう [5]。式(3.31)において、 $R_s = B_n$ とおくと、式(3.29)より

$$\text{OSNR}_{\text{NL}} = \text{SNR}_{\text{NL}} = \frac{P_{\text{ch}}}{P_{\text{ASE}} + P_{\text{NLI}}} \quad (3.120)$$

となる。まず、ASE 雑音電力について考える。光増幅器の雑音指数などのファイバ特性とは無関係なパラメータを F とすると、伝送路全長 Nz_a 伝送後のトータルの ASE 雑音電力は

$$P_{\text{ASE}}(Nz_a) = FNG = FN \exp(2\alpha z_a) \quad (3.121)$$

と表される。一方、NLI 雑音電力は、式(3.119)より

$$\begin{aligned} P_{\text{NLI}}(Nz_a) &= \eta \frac{\gamma^2 N P_{\text{ch}}^3 L_{\text{eff}}}{|\beta_0^{(2)}|} \\ &= h P_{\text{ch}}^3 \end{aligned} \quad (3.122)$$

と表される。ここで、

$$\eta = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \frac{\log_e(\pi^2 |\beta_0^{(2)}| L_{\text{eff}} N_{\text{ch}}^2 R_s^2)}{R_s^2} \quad (3.123)$$

であり、簡単のために、以下では定数として扱う。また、

$$h = \eta \frac{\gamma^2 N L_{\text{eff}}}{|\beta_0^{(2)}|} \quad (3.124)$$

である。式(3.122)を(3.120)に代入すると、

$$\text{OSNR}_{\text{NL}} = \frac{P_{\text{ch}}}{P_{\text{ASE}} + h P_{\text{ch}}^3} \quad (3.125)$$

となる。式(3.125)を P_{ch} について微分すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\text{OSNR}_{\text{NL}})}{\partial P_{\text{ch}}} &= \frac{\partial}{\partial P_{\text{ch}}} \left(\frac{P_{\text{ch}}}{P_{\text{ASE}} + h P_{\text{ch}}^3} \right) \\ &= \frac{P_{\text{ASE}} - 2h P_{\text{ch}}^3}{(P_{\text{ASE}} + h P_{\text{ch}}^3)^2} \end{aligned} \quad (3.126)$$

となる。式(3.126)の右辺を0とおくことにより、 P_{ch} の最適値 $P_{\text{ch}}^{(\text{opt})}$ を求めることができる。式(3.121)、(3.124)より、

$$\begin{aligned} P_{\text{ch}}^{(\text{opt})} &= \left(\frac{P_{\text{ASE}}}{2h} \right)^{1/3} \\ &= \left(\frac{F}{2\eta} \right)^{1/3} \left\{ \frac{|\beta_0^{(2)}| \exp(2\alpha z_a)}{\gamma^2 L_{\text{eff}}} \right\}^{1/3} \end{aligned} \quad (3.127)$$

となる。式 (3.127) における $P_{\text{ch}}^{(\text{opt})}$ の単位を [mW] としてデシベル表示すると、

$$\begin{aligned} P_{\text{ch}}^{(\text{opt})}[\text{dBm}] &= 10 \log_{10} P_{\text{ch}}^{(\text{opt})}[\text{mW}] \\ &= C_1 - \frac{10}{3} \log_{10} \left(\frac{\gamma^2 L_{\text{eff}}}{|\beta_0^{(2)}|} \right) + \frac{1}{3} \hat{\alpha} z_a \end{aligned} \quad (3.128)$$

となる。なお、上式を導く際に式 (2.32) を用いた。また、

$$C_1 = \frac{10}{3} \log_{10} \left(\frac{F}{2\eta} \right) \quad (3.129)$$

であり、 C_1 は伝送に用いるファイバとは無関係なパラメータである。さらに、式 (3.127) を (3.125) に代入し、(3.121) および (3.124) を用いると、

$$\text{OSNR}_{\text{NL}}^{(\text{max})} = \left(\frac{4}{27F^2\eta} \right)^{1/3} \frac{1}{N} \left\{ \frac{|\beta_0^{(2)}| \exp(-4\alpha z_a)}{\gamma^2 L_{\text{eff}}} \right\}^{1/3} \quad (3.130)$$

が得られる。 $\text{OSNR}_{\text{NL}}^{(\text{max})}$ をデシベル表示すると、

$$\begin{aligned} \text{OSNR}_{\text{NL}}^{(\text{max})}[\text{dB}] &= 10 \log_{10} \text{OSNR}_{\text{NL}}^{(\text{max})} \\ &= C_2 - \frac{10}{3} \log_{10} \left(\frac{\gamma^2 L_{\text{eff}}}{|\beta_0^{(2)}|} \right) - \frac{2}{3} \hat{\alpha} z_a - 10 \log_{10} N \end{aligned} \quad (3.131)$$

となる。ここで、

$$C_2 = \frac{10}{3} \log_{10} \left(\frac{4}{27F^2\eta} \right) \quad (3.132)$$

であり、 C_2 も伝送に用いるファイバとは無関係なパラメータである。

次に、チャンネル当たりの送信電力 P_{ch} が最適でない場合に P_{ch} に対する OSNR_{NL} がどのように表されるかを考える。 r を定数として、 $P_{\text{ch}} = rP_{\text{ch}}^{(\text{opt})}$ とすると、式 (3.125) および (3.127)、(3.130) より、 $\text{OSNR}_{\text{NL}}^{(r)}$ は

$$\begin{aligned} \text{OSNR}_{\text{NL}}^{(r)} &= \frac{rP_{\text{ch}}^{(\text{opt})}}{P_{\text{ASE}} + hr^3(P_{\text{ch}}^{(\text{opt})})^3} \\ &= \frac{3r}{r^3 + 2} \text{OSNR}_{\text{NL}}^{(\text{max})} \end{aligned} \quad (3.133)$$

となる。したがって、 $\text{OSNR}_{\text{NL}}^{(r)}$ をデシベル表示すると、

$$\begin{aligned} \text{OSNR}_{\text{NL}}^{(r)}[\text{dB}] &= 10 \log_{10} \text{OSNR}_{\text{NL}}^{(r)} \\ &= 10 \log_{10} \left(\frac{3r}{r^3 + 2} \right) + \text{OSNR}_{\text{NL}}^{(\text{max})}[\text{dB}] \end{aligned} \quad (3.134)$$

となる。式 (3.133) を図 3.7 に示す。式 (3.128) および (3.131) において、(3.129) に示す C_1 および (3.132) に示す C_2 を除く伝送路のパラメータ、すなわち、2 次の

分散係数 $\beta_0^{(2)}$ 、非線形係数 γ 、損失係数 α 、光増幅器間隔 z_a 、区間数 N のみによって、最適送信光電力 $P_{\text{ch}}^{(\text{opt})}$ および OSNR の最大値 $\text{OSNR}_{\text{NL}}^{(\text{max})}$ を求めることができる。また、式 (3.134) から、チャンネル当たりの送信光電力 P_{ch} がその最適値からずれた場合の OSNR を求めることができる。よって、これらの結果をナイキスト WDM 伝送システムの評価および設計に適用することが可能である。

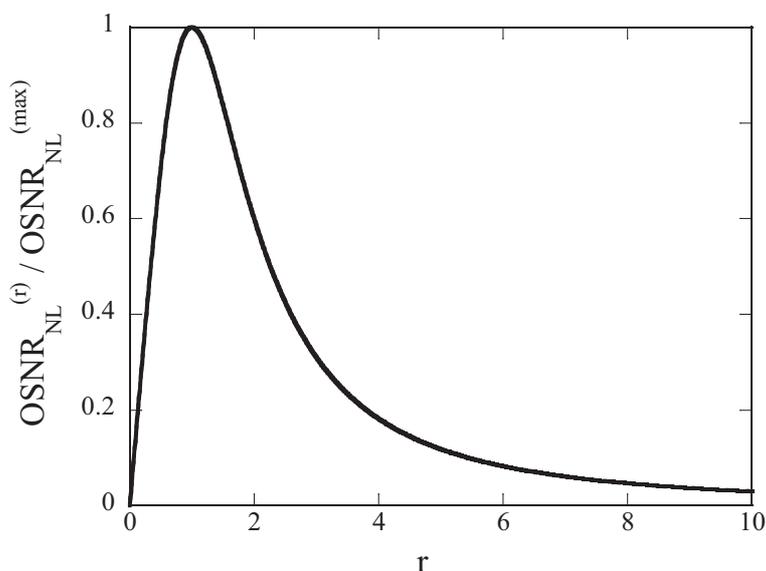


図 3.7: $P_{\text{ch}} = rP_{\text{ch}}^{(\text{opt})}$ とした場合の $\text{OSNR}_{\text{NL}}^{(r)}$ の変化

参考文献

- [1] A. Carena, V. Curri, G. Bosco, P. Poggiolini, and F. Forghieri, “Modeling of the impact of nonlinear propagation effects in uncompensated optical coherent transmission links,” *IEEE/OSA J. Lightwave Technol.*, Vol.30, No.10, pp.1524-1539 (2012).
- [2] P. Poggiolini, “The GN model of non-linear propagation in uncompensated coherent optical systems,” *IEEE/OSA J. Lightwave Technol.*, Vol.30, No.24, pp.3857-3879 (2012).
- [3] P. Poggiolini, A. Carena, V. Curri, G. Bosco, and F. Forghieri, “Analytical modeling of nonlinear propagation in uncompensated optical transmission links,” *IEEE Photon. Technol. Lett.*, Vol.23, No.11, pp.742-744 (2011).
- [4] A. Nespola, S. Straullu, A. Carena, G. Bosco, R. Cigliutti, P. Poggiolini, M. Hirono, Y. Yamamoto, T. Sasaki, J. Bauwelinck, K. Verheyen, and F. Forghieri, “GN-

model validation over seven fiber types in uncompensated PM-16QAM Nyquist-WDM links,” *IEEE Photon. Technol. Lett.*, Vol.26, No.2, pp.206-209 (2014).

[5] 山本義典, 平野正晃, Vincent A. J. M. Sleiffer, 佐々木隆, “解析的な OSNR の導出と海底伝送に適したファイバの提案,” 電子情報通信学会光通信システム研究会, 信学技報 OCS2013-23 (July 2013).

[6] 齊藤洋一, デジタル無線通信の変復調, 電子情報通信学会 (1996).

[7] K. O. Hill, D. C. Johnson, B. S. Kawasaki, and R. I. MacDonald, “cw three-wave mixing in single-mode optical fibers,” *J. Appl. Phys.*, Vol.49, No.10, pp.88-93 (Oct. 1978).

[8] Kyo Inoue and Hiromi Toba, “Fiber Four-Wave Mixing in Multi-Amplifier Systems with Nonuniform Chromatic Dispersion,” *IEEE/OSA J. Lightwave Technol.*, Vol.33, No.1, pp.88-93 (Jan. 1995).

[9] 井上恭, ファイバー通信のための非線形光学, 森北出版 (2011).

第4章 準線形コヒーレント伝送システムにおける非線形シャノン限界

Mitra らが非線形シャノン限界に関する報告 [1] を行って以来、非線形シャノン限界に関する多くの報告がなされてきた [2-5]。本章では、Mecozzi らによって展開された理論 [6-10] について解説する。

4.1 問題の設定

群速度分散および利得/損失が長手方向に変化するファイバ伝送路中における光波 $E(z, t)$ の振る舞いは式 (2.31) より次式で記述される。

$$i \frac{\partial E}{\partial z} - \frac{\beta_0^{(2)}(z)}{2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \gamma |E|^2 E = ig(z)E + n(z, t) \quad (4.1)$$

ここで、 $g(z)$ は利得 ($g(z) > 0$) または損失 ($g(z) < 0$) を表す。また、 $n(z, t)$ は加法的な自然放出光雑音 (ASE 雑音) を表し、その周波数領域における相関関数は

$$\begin{aligned} \langle \hat{n}(z, \Delta\omega) \hat{n}(z', \Delta\omega') \rangle &= 0 \\ \langle \hat{n}^*(z, \Delta\omega) \hat{n}(z', \Delta\omega') \rangle &= \hat{C}(z, \Delta\omega) \delta(\Delta\omega - \Delta\omega') \delta(z - z') \end{aligned} \quad (4.2)$$

で与えられるとする。ここで、 $\delta(x)$ はディラックのデルタ関数である。また、 $\hat{C}(z, \Delta\omega)$ は局所的な自然放出の割合を表し、

$$\hat{C}(z, \Delta\omega) = \frac{g(z, \Delta\omega) n_{\text{sp}}(z, \Delta\omega) \hbar\omega_0}{\sqrt{2\pi}} \quad (4.3)$$

で与えられる。ここで、 $g(z, \Delta\omega)$ は局所的な利得を表し、 $g(z) = g(z, 0)$ である。また、 n_{sp} は分布反転パラメータである。 $\hbar = h/(2\pi)$, (h はプランク定数) であり、 $\hbar\omega_0$ は搬送波周波数の光子のエネルギーである。このとき、 $\hat{C}(z, \Delta\omega) dz$ は区間 dz の区間で付加される単位帯域当たりの自然放出光電力を表す。式 (4.2) は時間領域では

$$\begin{aligned} \langle n(z, t) n(z', t') \rangle &= 0 \\ \langle n^*(z, t) n(z', t') \rangle &= C(z, t - t') \delta(z - z') \end{aligned} \quad (4.4)$$

と表される。ここで、 $C(z, t)$ は式 (2.4) より

$$C(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{C}(z, \Delta\omega) \exp(-i\Delta\omega t) d(\Delta\omega) \quad (4.5)$$

と表される。

次に、伝送路への入力波形、すなわち、式 (4.1) の初期条件について考えよう。全ての波長チャンネルのシンボルレートが等しい波長分割多重 (WDM) 伝送を考え、波長チャンネル内では時刻 $t = 0$ を基準として間隔 T で等間隔に並んだ同一波形のパルス列を、波長チャンネル間では式 (2.1) の ω_0 を基準として間隔 Ω で等間隔に並んだチャンネルを入力波形とする。波長チャンネル内でパルスを区別するための指標を k 、チャンネルを区別するための指標を s として、入力波形を次式で表す。

$$E(0, t) = \sum_s \sum_k a_k^{(s)} E_0(0, t - [T_k + \delta T_s]) \exp[-i(\Omega_s t - \phi_s)] \quad (4.6)$$

ここで、 $a_k^{(s)}$ は無次元の複素数であり、個々のパルスの変調された振幅および位相を表す。 $E_0(0, t)$ は1つのパルスの初期波形を表す。また、角周波数 ω_0 の基準チャンネル ($s = 0$) のパルスの時間位置および位相を基準に選び、 k 番目のパルスの中心位置を $t = T_k = kT$ 、位相シフト $\phi_0 = 0$ とする。一方、角周波数 $\omega_0 + \Omega_s = \omega_0 + s\Omega$ の s 番目のチャンネルの k 番目のパルスの中心位置を $t = T_k + \delta T_s = kT + \delta T_s$ (ただし、 $|\delta T_s| < T/2$) とし、チャンネル間でのパルス位置のずれを考慮する。また、 s 番目のチャンネルのパルスの位相は基準チャンネルに対して ϕ_s だけシフトしているものとする。このとき、式 (4.6) は

$$E(0, t) = \sum_k \left[a_k^{(0)} E_0(0, t - T_k) + \sum_{s \neq 0} a_k^{(s)} E_0(0, t - [T_k + \delta T_s]) \exp[-i(\Omega_s t - \phi_s)] \right] \quad (4.7)$$

と表される。さらに、パルス同士は直交していると仮定する。すなわち、

$$\int_{-\infty}^{\infty} E_0^*(0, t - T_\ell) E_0(0, t - T_m) dt = \mathcal{E} \delta_{\ell, m} \quad (4.8)$$

が成立するとする。ここで、 $\delta_{\ell, m}$ はクロネッカーのデルタであり、

$$\mathcal{E} = \int_{-\infty}^{\infty} |E_0(0, t)|^2 dt \quad (4.9)$$

は無変調の場合の1つのパルスのエネルギーを表す。

式 (4.1) において、

$$E(z, t) = a(z)U(z, t) \quad (4.10)$$

とおき、 $a(z)$ が

$$\frac{da(z)}{dz} = g(z)a(z) \quad (4.11)$$

を満たすものとする。式 (4.11) の解は

$$a(z) = a(0) \exp \left[\int_0^z g(\zeta) d\zeta \right] \quad (4.12)$$

となる。 $a(0) = \sqrt{\mathcal{E}}$ とし、さらに、

$$a_0(z) = \exp \left[\int_0^z g(\zeta) d\zeta \right] \quad (4.13)$$

とおくと、式 (4.10) は

$$E(z, t) = \sqrt{\mathcal{E}} a_0(z) U(z, t) \quad (4.14)$$

と表される。式 (4.14) を (4.1) に代入し、次式を得る。

$$i \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\beta_0^{(2)}(z)}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \gamma \mathcal{E} a_0^2(z) |U|^2 U = \frac{n(z, t)}{\sqrt{\mathcal{E}} a_0(z)} \quad (4.15)$$

一方、初期条件については、式 (4.14) より $E(0, t) = \sqrt{\mathcal{E}} a_0(0) U(0, t) = \sqrt{\mathcal{E}} U(0, t)$ と表されるので、式 (4.7) より、 $U(z, t)$ に対する初期条件は

$$\begin{aligned} U(0, t) &= \frac{E(0, t)}{\sqrt{\mathcal{E}}} \\ &= \sum_k \left[a_k^{(0)} U_0(0, t - T_k) + \sum_{s \neq 0} a_k^{(s)} U_0(0, t - [T_k + \delta T_s]) \exp[-i(\Omega_s t - \phi_s)] \right] \end{aligned} \quad (4.16)$$

と書くことができる。ここで、時間中心位置が $t = T_k$ の 1 つのパルスは

$$U_0(0, t - T_k) = \frac{E_0(0, t - T_k)}{\sqrt{\mathcal{E}}} \quad (4.17)$$

と表され、式 (4.17) を (4.8) に代入すると、

$$\int_{-\infty}^{\infty} U_0^*(0, t - T_\ell) U_0(0, t - T_m) dt = \frac{1}{\mathcal{E}} \int_{-\infty}^{\infty} E_0^*(0, t - T_\ell) E_0(0, t - T_m) dt = \delta_{\ell, m} \quad (4.18)$$

となり、 $U_0(0, t - T_k)$ は正規直交系をなす。

4.2 摂動法の適用

式(4.15)の解 $U(z, t)$ を以下の式で摂動展開する。

$$U(z, t) = u(z, t) + \Delta u(z, t) + \dots \quad (4.19)$$

式(4.19)を(4.15)に代入し、非線形項を高次項とみなすと、 $u(z, t)$ に関する線形方程式

$$i \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\beta_0^{(2)}(z)}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{n(z, t)}{\sqrt{\mathcal{E}a_0(z)}} \quad (4.20)$$

が得られる。この方程式が主要項である。一方、非線形性による補正項である $\Delta u(z, t)$ は次式に示す線形方程式で与えられる。

$$i \frac{\partial(\Delta u)}{\partial z} - \frac{\beta_0^{(2)}(z)}{2} \frac{\partial^2(\Delta u)}{\partial t^2} + \gamma \mathcal{E} a_0^2(z) |u|^2 u = 0 \quad (4.21)$$

摂動法の要点は、非線形方程式(4.15)の非線形項を零とした式(4.20)の解を0次近似解とし、0次近似解のまわりで小信号近似を用いて線形化した方程式(4.21)の解(1次近似解)を、0次近似解に対する非線形性による補正項として求めることである。もちろん、同様の手順を繰り返すことによって、より高次の近似解を求めることもできる。また、 $u(z, t)$ および $\Delta u(z, t)$ に対する初期条件は式(4.16)より

$$\begin{aligned} u(0, t) &= U(0, t) \\ &= \sum_k \left[a_k^{(0)} u_0(0, t - T_k) + \sum_{s \neq 0} a_k^{(s)} u_0(0, t - [T_k + \delta T_s]) \exp[-i(\Omega_s t - \phi_s)] \right] \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$\Delta u(0, t) = 0 \quad (4.23)$$

とする。ここで、 $u_0(0, t - [T_k + \delta T_s]) = U_0(0, t - [T_k + \delta T_s])$ であり、式(4.18)に示す通り、 $u_0(0, t - T_k)$ は正規直交関数系をなし、次式を満足する。

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_0^*(0, t - T_\ell) u_0(0, t - T_m) dt = \delta_{\ell, m} \quad (4.24)$$

また、式(4.22)、(4.23)、(4.24)のフーリエ変換は

$$\begin{aligned} \hat{u}(0, \Delta\omega) &= \sum_k \left[a_k^{(0)} \hat{u}_0(0, \Delta\omega) \exp(i\Delta\omega T_k) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{s \neq 0} a_k^{(s)} \hat{u}_0(0, \Delta\omega - \Omega_s) \exp[i\{(\Delta\omega - \Omega_s)(T_k + \delta T_s) + \phi_s\}] \right] \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$\widehat{\Delta u}(0, \Delta\omega) = 0 \quad (4.26)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{u}_0(0, \Delta\omega)|^2 \exp[-i\Delta\omega(T_\ell - T_m)] d(\Delta\omega) = \delta_{\ell,m} \quad (4.27)$$

となる。ここで、 $\hat{u}_k(\Delta\omega)$ は $u_k(t)$ のフーリエ変換である。

まず、 $u(z, t)$ に関する方程式 (4.20) を解いてみよう。(4.20) をフーリエ変換し、

$$i \frac{\partial \hat{u}}{\partial z} + \frac{\beta_0^{(2)}(z)}{2} (\Delta\omega)^2 \hat{u} = \frac{\hat{n}(z, \Delta\omega)}{\sqrt{\mathcal{E}a_0(z)}} \quad (4.28)$$

を得る。式 (4.28) の右辺を零とおいた同次方程式の解は

$$\hat{u}(z, \Delta\omega) = \hat{u}(0, \Delta\omega) \exp \left\{ i \frac{(\Delta\omega)^2}{2} B(z) \right\} \quad (4.29)$$

となる。ここで、

$$B(z) = \int_0^z \beta_0^{(2)}(\zeta) d\zeta \quad (4.30)$$

である。定数変化法によって非同次方程式 (4.28) を解くことを考えよう。(4.29) の係数 $\hat{u}(0, \Delta\omega)$ を z の関数 $\tilde{u}(z, \Delta\omega)$ で置き換えた式を (4.28) に代入すると、 $\tilde{u}(z, \Delta\omega)$ に関する微分方程式

$$i \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} = \frac{\hat{n}(z, \Delta\omega)}{\sqrt{\mathcal{E}a_0(z)}} \exp \left\{ -i \frac{(\Delta\omega)^2}{2} B(z) \right\} \quad (4.31)$$

が得られる。式 (4.31) を積分し、次式を得る。

$$\tilde{u}(z, \Delta\omega) = \tilde{u}(0, \Delta\omega) - i \hat{u}_{\text{NS}}''(z, \Delta\omega) \quad (4.32)$$

ここで、

$$\hat{u}_{\text{NS}}''(z, \Delta\omega) = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{E}}} \int_0^z \frac{\hat{n}(\zeta, \Delta\omega)}{a_0(\zeta)} \exp \left\{ -i \frac{(\Delta\omega)^2}{2} B(\zeta) \right\} d\zeta \quad (4.33)$$

である。式 (4.32) を (4.29) に代入すると、

$$\hat{u}(z, \Delta\omega) = \{ \tilde{u}(0, \Delta\omega) - i \hat{u}_{\text{NS}}''(z, \Delta\omega) \} \exp \left\{ i \frac{(\Delta\omega)^2}{2} B(z) \right\} \quad (4.34)$$

となる。式 (4.34) において、 $z = 0$ とすると、 $\hat{u}(0, \Delta\omega) = \tilde{u}(0, \Delta\omega)$ となるので、結局、式 (4.34) は

$$\hat{u}(z, \Delta\omega) = \{ \hat{u}(0, \Delta\omega) - i \hat{u}_{\text{NS}}''(z, \Delta\omega) \} \exp \left\{ i \frac{(\Delta\omega)^2}{2} B(z) \right\} \quad (4.35)$$

と書くことができる。式 (4.35) を逆フーリエ変換し、

$$\begin{aligned}
u(z, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(0, \Delta\omega) \exp \left[i \left\{ \frac{(\Delta\omega)^2}{2} B(z) - (\Delta\omega)t \right\} \right] d(\Delta\omega) \\
&\quad - \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}_{\text{NS}}''(z, \Delta\omega) \exp \left[i \left\{ \frac{(\Delta\omega)^2}{2} B(z) - (\Delta\omega)t \right\} \right] d(\Delta\omega)
\end{aligned} \tag{4.36}$$

を得る。

ところで、式 (4.33) に示す $\hat{u}_{\text{NS}}''(z, \Delta\omega)$ の逆フーリエ変換は

$$u_{\text{NS}}''(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\mathcal{E}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^z \frac{\hat{n}(\zeta, \Delta\omega)}{a_0(\zeta)} \exp \left[-i \left\{ \frac{(\Delta\omega)^2}{2} B(\zeta) + (\Delta\omega)t \right\} \right] d\zeta \right) d(\Delta\omega) \tag{4.37}$$

となる。また、式 (4.4) より

$$\begin{aligned}
&\langle \hat{u}_{\text{NS}}''(z, \Delta\omega) \hat{u}_{\text{NS}}''(z', \Delta\omega') \rangle \\
&= \left\langle \frac{1}{\mathcal{E}} \int_0^z \frac{\hat{n}(\zeta, \Delta\omega)}{a_0(\zeta)} \exp \left\{ -i \frac{(\Delta\omega)^2}{2} B(\zeta) \right\} d\zeta \int_0^{z'} \frac{\hat{n}(\zeta', \Delta\omega')}{a_0(\zeta')} \exp \left\{ -i \frac{(\Delta\omega')^2}{2} B(\zeta') \right\} d\zeta' \right\rangle \\
&= \frac{1}{\mathcal{E}} \int_0^z \int_0^{z'} \frac{\langle \hat{n}(\zeta, \Delta\omega) \hat{n}(\zeta', \Delta\omega') \rangle}{a_0(\zeta)a_0(\zeta')} \exp \left\{ -i \frac{(\Delta\omega)^2 B(\zeta) + (\Delta\omega')^2 B(\zeta')}{2} \right\} d\zeta d\zeta' \\
&= 0 \\
&\langle \hat{u}_{\text{NS}}''^*(z, \Delta\omega) \hat{u}_{\text{NS}}''(z', \Delta\omega') \rangle \\
&= \frac{1}{\mathcal{E}} \int_0^z \int_0^{z'} \frac{\langle \hat{n}^*(\zeta, \Delta\omega) \hat{n}(\zeta', \Delta\omega') \rangle}{a_0(\zeta)a_0(\zeta')} \exp \left[i \left\{ \frac{(\Delta\omega)^2 B(\zeta) - (\Delta\omega')^2 B(\zeta')}{2} \right\} \right] d\zeta d\zeta' \\
&= \frac{1}{\mathcal{E}} \int_0^z \int_0^{z'} \frac{\hat{C}(\zeta, \Delta\omega) \delta(\Delta\omega - \Delta\omega') \delta(\zeta - \zeta')}{a_0(\zeta)a_0(\zeta')} \exp \left\{ i \frac{(\Delta\omega)^2 B(\zeta) - (\Delta\omega')^2 B(\zeta')}{2} \right\} d\zeta d\zeta' \\
&= \frac{1}{\mathcal{E}} \int_0^z \int_0^{z'} \frac{\hat{C}(\zeta, \Delta\omega) \delta(\zeta - \zeta')}{a_0(\zeta)a_0(\zeta')} \exp \left\{ i \frac{(\Delta\omega)^2 B(\zeta) - (\Delta\omega')^2 B(\zeta')}{2} \right\} d\zeta d\zeta' \delta(\Delta\omega - \Delta\omega') \\
&= \kappa(z, z') \delta(\Delta\omega - \Delta\omega')
\end{aligned} \tag{4.38}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned}
\kappa(z, z') &= \frac{1}{\mathcal{E}} \int_0^z \int_0^{z'} \frac{\hat{C}(\zeta, \Delta\omega) \delta(\zeta - \zeta')}{a_0(\zeta)a_0(\zeta')} \exp \left\{ i \frac{(\Delta\omega)^2 B(\zeta) - (\Delta\omega')^2 B(\zeta')}{2} \right\} d\zeta d\zeta' \\
&= \frac{1}{\mathcal{E}} \int_0^{\min(z, z')} \frac{\hat{C}(\zeta, \Delta\omega)}{a_0^2(\zeta)} \exp \left\{ i \frac{(\Delta\omega)^2 - (\Delta\omega')^2}{2} B(\zeta) \right\} d\zeta \\
&= \frac{1}{\mathcal{E}} \int_0^{\min(z, z')} \frac{\hat{C}(\zeta, \Delta\omega)}{a_0^2(\zeta)} d\zeta
\end{aligned} \tag{4.39}$$

である。上式を導く際に、 $\hat{u}''_{\text{NS}}(z, \Delta\omega)$ の統計的性質は $\beta_0^{(2)}$ に依存しないことを用いた。よって、式 (4.33) において $\beta_0^{(2)} = 0$ とおいた

$$\hat{u}'_{\text{NS}}(z, \Delta\omega) = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{E}}} \int_0^z \frac{\hat{n}(\zeta, \Delta\omega)}{a_0(\zeta)} d\zeta \quad (4.40)$$

は $\hat{u}''_{\text{NS}}(z, \Delta\omega)$ と等価である。また、このとき式 (4.37) は

$$u'_{\text{NS}}(z, t) = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{E}}} \int_0^z \frac{n(\zeta, t)}{a_0(\zeta)} d\zeta \quad (4.41)$$

となり、式 (4.35) および (4.36) は

$$\hat{u}(z, \Delta\omega) = \{\hat{u}(0, \Delta\omega) - i \hat{u}'_{\text{NS}}(z, \Delta\omega)\} \exp\left\{i \frac{(\Delta\omega)^2}{2} B(z)\right\} \quad (4.42)$$

$$\begin{aligned} u(z, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(0, \Delta\omega) \exp\left[i \left\{ \frac{(\Delta\omega)^2}{2} B(z) - (\Delta\omega)t \right\}\right] d(\Delta\omega) \\ &\quad - \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}'_{\text{NS}}(z, \Delta\omega) \exp\left[i \left\{ \frac{(\Delta\omega)^2}{2} B(z) - (\Delta\omega)t \right\}\right] d(\Delta\omega) \end{aligned} \quad (4.43)$$

となる。

次に、 $\Delta u(z, t)$ に関する方程式 (4.21) を解いてみよう。式 (4.21) をフーリエ変換し、

$$\begin{aligned} & i \frac{\partial \widehat{\Delta u}}{\partial z} + \frac{\beta_0^{(2)}(z)}{2} (\Delta\omega)^2 \widehat{\Delta u} \\ &= -\frac{\gamma \mathcal{E} a_0^2(z)}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |u(z, t)|^2 u(z, t) \exp(i\Delta\omega t) dt \\ &= -\frac{\gamma \mathcal{E} a_0^2(z)}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(z, \Delta\omega_1) \exp(-i\Delta\omega_1 t) d(\Delta\omega_1) \right\} \\ &\quad \times \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}^*(z, \Delta\omega_2) \exp(i\Delta\omega_2 t) d(\Delta\omega_2) \right\} \\ &\quad \times \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(z, \Delta\omega_3) \exp(-i\Delta\omega_3 t) d(\Delta\omega_3) \right\} \exp(i\Delta\omega t) dt \\ &= -\frac{\gamma \mathcal{E} a_0^2(z)}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(z, \Delta\omega_1) \hat{u}^*(z, \Delta\omega_2) \hat{u}(z, \Delta\omega_3) \\ &\quad \times \left[\int_{-\infty}^{\infty} \exp\{i(\Delta\omega - \Delta\omega_1 + \Delta\omega_2 - \Delta\omega_3)t\} dt \right] d(\Delta\omega_1) d(\Delta\omega_2) d(\Delta\omega_3) \\ &= -\frac{\gamma \mathcal{E} a_0^2(z)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(z, \Delta\omega_1) \hat{u}^*(z, \Delta\omega_2) \hat{u}(z, \Delta\omega_3) \\ &\quad \times \delta(\Delta\omega - \Delta\omega_1 + \Delta\omega_2 - \Delta\omega_3) d(\Delta\omega_1) d(\Delta\omega_2) d(\Delta\omega_3) \\ &= -\frac{\gamma \mathcal{E} a_0^2(z)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(z, \Delta\omega_1) \hat{u}^*(z, \Delta\omega_2) \hat{u}(z, \Delta\omega - \Delta\omega_1 + \Delta\omega_2) d(\Delta\omega_1) d(\Delta\omega_2) \end{aligned} \quad (4.44)$$

を得る。上式を導く際に

$$\delta(\Delta\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\Delta\omega t) dt \quad (4.45)$$

を用いた。

まず、式(4.44)において $\gamma = 0$ とおいた同次方程式の解は、式(4.29)と同様に

$$\widehat{\Delta u}(z, \Delta\omega) = \widehat{\Delta u}(0, \Delta\omega) \exp\left\{i\frac{(\Delta\omega)^2}{2}B(z)\right\} \quad (4.46)$$

となる。式(4.46)の係数 $\widehat{\Delta u}(0, \Delta\omega)$ を z の関数 $\widetilde{\Delta u}(z, \Delta\omega)$ で置き換えた式を(4.44)に代入すると、 $\widetilde{\Delta u}(z, \Delta\omega)$ に関する微分方程式

$$\begin{aligned} i\frac{\partial \widetilde{\Delta u}}{\partial z} &= -\frac{\gamma \mathcal{E} a_0^2(z)}{2\pi} \exp\left\{-i\frac{(\Delta\omega)^2}{2}B(z)\right\} \\ &\times \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{u}(z, \Delta\omega_1) \widehat{u}^*(z, \Delta\omega_2) \widehat{u}(z, \Delta\omega - \Delta\omega_1 + \Delta\omega_2) d(\Delta\omega_1) d(\Delta\omega_2) \right\} \end{aligned} \quad (4.47)$$

が得られる。式(4.47)を積分し、次式を得る。

$$\widetilde{\Delta u}(z, \Delta\omega) = i \widehat{u}'_{\text{NL}}(z, \Delta\omega) \quad (4.48)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \widehat{u}'_{\text{NL}}(z, \Delta\omega) &= \frac{\gamma \mathcal{E}}{2\pi} \int_0^z a_0^2(\zeta) \\ &\times \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{u}(\zeta, \Delta\omega_1) \widehat{u}^*(\zeta, \Delta\omega_2) \widehat{u}(\zeta, \Delta\omega - \Delta\omega_1 + \Delta\omega_2) d(\Delta\omega_1) d(\Delta\omega_2) \right\} \\ &\times \exp\left\{-i\frac{(\Delta\omega)^2}{2}B(\zeta)\right\} d\zeta \end{aligned} \quad (4.49)$$

である。上式を導くにあたって、式(4.23)より、 $\widetilde{\Delta u}(0, \Delta\omega) = \widehat{\Delta u}(0, \Delta\omega) = 0$ とした。式(4.48)を(4.46)に代入すると、

$$\widehat{\Delta u}(z, \Delta\omega) = i \widehat{u}'_{\text{NL}}(z, \Delta\omega) \exp\left\{i\frac{(\Delta\omega)^2}{2}B(z)\right\} \quad (4.50)$$

となる。式(4.50)を逆フーリエ変換し、

$$\Delta u(z, t) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{u}'_{\text{NL}}(z, \Delta\omega) \exp\left[i\left\{\frac{(\Delta\omega)^2}{2}B(z) - (\Delta\omega)t\right\}\right] d(\Delta\omega) \quad (4.51)$$

を得る。

ところで、式(4.49)の逆フーリエ変換は

$$\begin{aligned}
u'_{\text{NL}}(z, t) &= \frac{\gamma \mathcal{E}}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^z a_0^2(\zeta) \right. \\
&\quad \times \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(\zeta, \Delta\omega_1) \hat{u}^*(\zeta, \Delta\omega_2) \hat{u}(\zeta, \Delta\omega - \Delta\omega_1 + \Delta\omega_2) d(\Delta\omega_1) d(\Delta\omega_2) \right\} \\
&\quad \times \exp \left[-i \left\{ \frac{(\Delta\omega)^2}{2} B(\zeta) + (\Delta\omega)t \right\} \right] d\zeta \Big) d(\Delta\omega) \quad (4.52)
\end{aligned}$$

となる。

よって、式(4.43)および(4.51)を(4.19)に代入し、

$$\begin{aligned}
U(z, t) &\simeq u_{\text{L}}(z, t) + \Delta u_{\text{pert}}(z, t) \\
&= u_{\text{L}}(z, t) + u_{\text{NS}}(z, t) + u_{\text{NL}}(z, t) \quad (4.53)
\end{aligned}$$

を得る。ここで、 $\Delta u_{\text{pert}}(z, t) = u_{\text{NS}}(z, t) + u_{\text{NL}}(z, t)$ であり、

$$u_{\text{L}}(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(0, \Delta\omega) \exp \left[i \left\{ \frac{(\Delta\omega)^2}{2} B(z) - (\Delta\omega)t \right\} \right] d(\Delta\omega) \quad (4.54)$$

$$u_{\text{NS}}(z, t) = -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}'_{\text{NS}}(z, \Delta\omega) \exp \left[i \left\{ \frac{(\Delta\omega)^2}{2} B(z) - (\Delta\omega)t \right\} \right] d(\Delta\omega) \quad (4.55)$$

$$u_{\text{NL}}(z, t) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}'_{\text{NL}}(z, \Delta\omega) \exp \left[i \left\{ \frac{(\Delta\omega)^2}{2} B(z) - (\Delta\omega)t \right\} \right] d(\Delta\omega) \quad (4.56)$$

である。

また、式(4.53)のフーリエ変換は(4.42)および(4.50)より

$$\begin{aligned}
\hat{U}(z, \Delta\omega) &\simeq \hat{u}_{\text{L}}(z, \Delta\omega) + \widehat{\Delta u}_{\text{pert}}(z, \Delta\omega) \\
&= \hat{u}_{\text{L}}(z, \Delta\omega) + \hat{u}_{\text{NS}}(z, \Delta\omega) + \hat{u}_{\text{NL}}(z, \Delta\omega) \quad (4.57)
\end{aligned}$$

となる。ここで、 $\widehat{\Delta u}_{\text{pert}}(z, \Delta\omega) = \hat{u}_{\text{NS}}(z, \Delta\omega) + \hat{u}_{\text{NL}}(z, \Delta\omega)$ であり、

$$\hat{u}_{\text{L}}(z, \Delta\omega) = \hat{u}(0, \Delta\omega) \exp \left\{ i \frac{(\Delta\omega)^2}{2} B(z) \right\} \quad (4.58)$$

$$\hat{u}_{\text{NS}}(z, \Delta\omega) = -i \hat{u}'_{\text{NS}}(z, \Delta\omega) \exp \left\{ i \frac{(\Delta\omega)^2}{2} B(z) \right\} \quad (4.59)$$

$$\hat{u}_{\text{NL}}(z, \Delta\omega) = i \hat{u}'_{\text{NL}}(z, \Delta\omega) \exp \left\{ i \frac{(\Delta\omega)^2}{2} B(z) \right\} \quad (4.60)$$

である。 $\widehat{\Delta u}'_{\text{pert}}(z, \Delta\omega) = -i \{ \hat{u}'_{\text{NS}}(z, \Delta\omega) - \hat{u}'_{\text{NL}}(z, \Delta\omega) \}$ とおくと、式(4.57)は

$$\hat{U}(z, \Delta\omega) = \{ \hat{u}_{\text{L}}(0, \Delta\omega) + \widehat{\Delta u}'_{\text{pert}}(z, \Delta\omega) \} \exp \left\{ i \frac{(\Delta\omega)^2}{2} B(z) \right\} \quad (4.61)$$

と書き直すことができる。

以下では、 $|\hat{u}_L(z, \Delta\omega)| \gg |\hat{u}_{NS}(z, \Delta\omega)|$ として、 $\hat{u}(z, \Delta\omega) \simeq \hat{u}_L(z, \Delta\omega)$ とし、式 (4.49) および (4.52) を次式で近似する。

$$\begin{aligned} \hat{u}'_{NL}(z, \Delta\omega) &\simeq \frac{\gamma\mathcal{E}}{2\pi} \int_0^z a_0^2(\zeta) \\ &\times \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}_L(\zeta, \Delta\omega_1) \hat{u}_L^*(\zeta, \Delta\omega_2) \hat{u}_L(\zeta, \Delta\omega - \Delta\omega_1 + \Delta\omega_2) d(\Delta\omega_1) d(\Delta\omega_2) \right\} \\ &\times \exp \left\{ -i \frac{(\Delta\omega)^2}{2} B(\zeta) \right\} d\zeta \end{aligned} \quad (4.62)$$

$$\begin{aligned} u'_{NL}(z, t) &= \frac{\gamma\mathcal{E}}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^z a_0^2(\zeta) \right. \\ &\times \left. \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}_L(\zeta, \Delta\omega_1) \hat{u}_L^*(\zeta, \Delta\omega_2) \hat{u}_L(\zeta, \Delta\omega - \Delta\omega_1 + \Delta\omega_2) d(\Delta\omega_1) d(\Delta\omega_2) \right\} \right. \\ &\times \left. \exp \left[-i \left\{ \frac{(\Delta\omega)^2}{2} B(\zeta) + (\Delta\omega)t \right\} \right] d\zeta \right) d(\Delta\omega) \end{aligned} \quad (4.63)$$

4.3 基本パルスの線形伝搬

式 (4.22) を初期値とする式 (4.20) の同次形の解 $u_L(z, t)$ を次式で表すことにしよう。

$$\begin{aligned} u_L(z, t) &= \sum_s \sum_k a_k^{(s)} u_0(z, t - [T_k + t_s(z)]) \exp[-i\{\Omega_s t - \theta_s(z)\}] \\ &= \sum_k \left[a_k^{(0)} u_0(z, t - T_k) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{s \neq 0} a_k^{(s)} u_0(z, t - [T_k + t_s(z)]) \exp[-i\{\Omega_s t - \theta_s(z)\}] \right] \end{aligned} \quad (4.64)$$

式 (4.64) 中の第 s チャンネルの k 番目のパルスに着目し、

$$\begin{aligned} u_L(z, t) &= u_0(z, t - [T_k + t_s(z)]) \exp[-i\{\Omega_s t - \theta'_s(z)\}] \\ &= A(z) f(\tau) \exp(i\varphi) \end{aligned} \quad (4.65)$$

とおく。ここで、 $f(\tau)$ はパルスの波形であり、

$$\tau(z, t) = p(z)\{t - t_0(z)\} \quad (4.66)$$

$$\varphi(z, t) = \frac{C(z)}{2} \tau^2 - \Omega_s t + \theta_s(z) \quad (4.67)$$

である。\$A, p, C, t_0(= T_k + t_s), \theta_s\$ はそれぞれパルスの振幅、パルス幅の逆数、線形チャープ、時間中心位置、位相を表し、\$z\$ の実関数とする。このとき、

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_L}{\partial z} &= \left[\frac{dA}{dz} f + A \frac{df}{d\tau} \left(\frac{dp}{dz} \frac{\tau}{p} - p \frac{dt_0}{dz} \right) \right. \\ &\quad \left. + iAf \left\{ \left(\frac{1}{2} \frac{dC}{dz} + \frac{C}{p} \frac{dp}{dz} \right) \tau^2 - Cp \frac{dt_0}{dz} \tau + \frac{d\theta_s}{dz} \right\} \right] \exp(i\varphi) \end{aligned} \quad (4.68)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_L}{\partial t^2} &= A \left[\left\{ \frac{d^2 f}{d\tau^2} p^2 - f(Cp\tau - \Omega_s)^2 \right\} \right. \\ &\quad \left. + i \left\{ 4 \frac{df}{d\tau} p(Cp\tau - \Omega_s) + Cp^2 f \right\} \right] \exp(i\varphi) \end{aligned} \quad (4.69)$$

となる。また、

$$f(\tau) = \exp\left(-\frac{\tau^2}{2}\right) \quad (4.70)$$

とすると、

$$\frac{1}{f} \frac{d^2 f}{d\tau^2} = \tau^2 - 1 \quad (4.71)$$

となる。式(4.71)を(4.69)に代入し、さらに、(4.68)、(4.69)を(4.20)の同次形の方程式に代入した式を実部と虚部に分離し、それぞれの式が\$\tau\$に依らずに成立するとすると、次式が得られる。

$$\frac{dA}{dz} = \frac{\beta_0^{(2)}(z)}{2} Ap^2 C \quad (4.72)$$

$$\frac{dp}{dz} = \beta_0^{(2)}(z) p^3 C \quad (4.73)$$

$$\frac{dC}{dz} = -\beta_0^{(2)}(z) p^2(1 + C^2) \quad (4.74)$$

$$\frac{dt_0}{dz} = \Omega_s \beta_0^{(2)}(z) \quad (4.75)$$

$$\frac{d\theta_s}{dz} = \frac{\beta_0^{(2)}(z)}{2} (\Omega_s^2 + p^2) \quad (4.76)$$

\$A_0 = A(0), p_0 = p(0), C_0 = C(0)\$ を初期値として、式(4.72)-(4.74)を解いてみよう。まず、パルスのエネルギーに比例する量 \$A^2/p\$ とパルスのスペクトル幅に比例する量 \$p^2(1 + C^2)\$ が \$z\$ に依らない保存量となることを示す。それらの量を \$z\$ について微分し、式(4.72)-(4.74)を代入すると、

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{A^2}{p} \right) = \frac{2A}{p} \frac{dA}{dz} - \frac{A^2}{p^2} \frac{dp}{dz}$$

$$= \frac{A}{p} \left[2 \left\{ \frac{\beta_0^{(2)}(z)}{2} A p^2 C \right\} - \frac{A}{p} \beta_0^{(2)}(z) p^3 C \right] = 0 \quad (4.77)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \{p^2(1+C^2)\} &= 2p(1+C^2) \frac{dp}{dz} + 2p^2 C \frac{dC}{dz} \\ &= 2p \left[(1+C^2) \beta_0^{(2)}(z) p^3 C + pC \{-\beta_0^{(2)}(z) p^2(1+C^2)\} \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.78)$$

となるので、 A^2/p および $p^2(1+C^2)$ は保存量である。よって、式(4.74)は

$$\frac{dC}{dz} = -\beta_0^{(2)}(z) p_0^2(1+C_0^2) \quad (4.79)$$

となる。上式を積分し、

$$C(z) = C_0 - p_0^2(1+C_0^2)B(z) \quad (4.80)$$

が得られる。次に、式(4.73)より、

$$\frac{1}{p^3} \frac{dp}{dz} = \frac{d}{dz} \left(-\frac{1}{2p^2} \right) = \beta_0^{(2)}(z) C \quad (4.81)$$

となる。上式を積分し、

$$\begin{aligned} \frac{1}{p^2(z)} &= \frac{1}{p_0^2} - 2 \int_0^z \beta_0^{(2)}(\zeta) C(\zeta) d\zeta \\ &= \frac{1}{p_0^2} - 2 \int_0^z \beta_0^{(2)}(\zeta) \{C_0 - p_0^2(1+C_0^2)B(\zeta)\} d\zeta \\ &= \frac{1}{p_0^2} - 2C_0B(z) + 2p_0^2(1+C_0^2) \int_0^z \beta_0^{(2)}(\zeta) B(\zeta) d\zeta \end{aligned} \quad (4.82)$$

となる。ところで、

$$\int_0^z \beta_0^{(2)}(\zeta) B(\zeta) d\zeta = [B^2(\zeta)]_0^z - \int_0^z B(\zeta) \beta_0^{(2)}(\zeta) d\zeta \quad (4.83)$$

となるので、

$$\int_0^z \beta_0^{(2)}(\zeta) B(\zeta) d\zeta = \frac{B^2(z)}{2} \quad (4.84)$$

である。式(4.84)を(4.82)に代入すると、

$$\frac{1}{p^2(z)} = \frac{1}{p_0^2} - 2C_0B(z) + p_0^2(1+C_0^2)B^2(z) \quad (4.85)$$

となる。よって、

$$p(z) = \frac{p_0}{\sqrt{1 - p_0^2 B(z) \{2C_0 - p_0^2(1+C_0^2)B(z)\}}} \quad (4.86)$$

となる。また、 A^2/p が保存量となることから、

$$A(z) = A_0 \sqrt{\frac{p(z)}{p_0}} = \frac{A_0}{[1 - p_0^2 B(z) \{2C_0 - p_0^2(1 + C_0^2)B(z)\}]^{1/4}} \quad (4.87)$$

となる。

次に、式 (4.75) を積分すると、

$$t_0(z) = t_0(0) + \Omega_s B(z) \quad (4.88)$$

となる。また、式 (4.76) を積分すると、

$$\theta_s(z) = \theta_s(0) + \frac{\Omega_s^2}{2} B(z) + \frac{1}{2} \int_0^z \beta_0^{(2)}(\zeta) p^2(\zeta) d\zeta \quad (4.89)$$

となる。ところで、式 (4.86) より

$$\int_0^z \beta_0^{(2)}(\zeta) p^2(\zeta) d\zeta = \int_0^z \frac{p_0^2 \beta_0^{(2)}(\zeta)}{1 - p_0^2 B(\zeta) \{2C_0 - p_0^2(1 + C_0^2)B(\zeta)\}} d\zeta \quad (4.90)$$

となる。 $x(\zeta) = C_0 - p_0^2(1 + C_0^2)B(\zeta)$ とおくと、 $dx = -p_0^2(1 + C_0^2)\beta_0^{(2)}(\zeta)d\zeta$ となり、上式は

$$\begin{aligned} & \int_{C_0}^{x(z)} \frac{1}{1 - \frac{C_0 - x}{1 + C_0^2}(C_0 + x)} \left(-\frac{dx}{1 + C_0^2} \right) \\ &= - \int_{C_0}^{x(z)} \frac{dx}{1 + x^2} = - \left[\tan^{-1} x \right]_{C_0}^{x(z)} \\ &= - \tan^{-1} \{C_0 - p_0^2(1 + C_0^2)B(z)\} + \tan^{-1} C_0 \end{aligned} \quad (4.91)$$

となる。式 (4.91) を (4.89) に代入すると、

$$\theta_s(z) = \theta_s(0) + \frac{\Omega_s^2}{2} B(z) - \frac{1}{2} [\tan^{-1} \{C_0 - p_0^2(1 + C_0^2)B(z)\} - \tan^{-1} C_0] \quad (4.92)$$

となる。

また、式 (4.22) より、 $t_0(0) = T_k + \delta T_s$ 、 $\theta_s(0) = \phi_s$ であることを考慮すると、

$$\begin{aligned} u_0(z, t - [T_k + t_s(z)]) &= A(z) f(\tau) \exp \left[i \left\{ \frac{C(z)}{2} \tau^2 + \theta_s(z) - \theta'_s(z) \right\} \right] \\ &= A(z) f(\tau) \exp \left[i \left\{ \frac{C(z)}{2} \tau^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{2} (\tan^{-1} \{C_0 - p_0^2(1 + C_0^2)B(z)\} - \tan^{-1} C_0) \right\} \right] \end{aligned} \quad (4.93)$$

$$t_s(z) = t_0(z) - T_k = \delta T_s + \Omega_s B(z) \quad (4.94)$$

$$\theta'_s(z) = \phi_s + \frac{\Omega_s^2}{2} B(z) \quad (4.95)$$

となる。また、式 (4.65)、(4.70)、(4.24) よりパルスのエネルギーは

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |u_L(z, t)|^2 dt &= \int_{-\infty}^{\infty} A^2(z) f^2(\tau) dt \\
&= \frac{A^2(z)}{p(z)} \int_{-\infty}^{\infty} f^2(\tau) d\tau \\
&= \frac{A^2(z)}{p(z)} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\tau^2) d\tau \\
&= \sqrt{\pi} \frac{A^2(z)}{p(z)} = 1
\end{aligned} \tag{4.96}$$

となる。よって、

$$A(z) = \sqrt{\frac{p(z)}{\sqrt{\pi}}} \tag{4.97}$$

となる。 $z = 0$ とおいた式 (4.97) を (4.87) に代入すると、

$$A(z) = \sqrt{\frac{p_0}{\sqrt{\pi}[1 - p_0^2 B(z)\{2C_0 - p_0^2(1 + C_0^2)B(z)\}]}} \tag{4.98}$$

となる。よって、 $C_0 = 0$ の場合に、 $t' = t - [T_k + t_s(z)]$ とおくと、式 (4.93) は

$$\begin{aligned}
u_0(z, t') &= \sqrt{\frac{p_0}{\sqrt{\pi}[1 + \{p_0^2 B(z)\}^2]}} \exp\left[-\frac{p_0^2}{2[1 + \{p_0^2 B(z)\}^2]} \{1 + ip_0^2 B(z)\} t'^2\right] \\
&\times \exp\left[\frac{i}{2} \tan^{-1}\{p_0^2 B(z)\}\right]
\end{aligned} \tag{4.99}$$

となる。一方、

$$u_0(0, t) = \sqrt{\frac{p_0}{\sqrt{\pi}}} \exp\left(-\frac{p_0^2}{2} t^2\right) \tag{4.100}$$

を初期値として、左辺を零とおいた式 (4.20) をフーリエ変換を使って解くことにしよう。式 (4.100) をフーリエ変換すると、

$$\hat{u}_0(0, \Delta\omega) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi} p_0}} \exp\left\{-\frac{(\Delta\omega)^2}{2p_0^2}\right\} \tag{4.101}$$

となる。式 (4.101) を (4.29) に代入すると、

$$\hat{u}_0(z, \Delta\omega) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi} p_0}} \exp\left\{-\frac{1 - ip_0^2 B(z)}{2p_0^2} (\Delta\omega)^2\right\} \tag{4.102}$$

となる。上式を逆フーリエ変換し、

$$u_0(z, t) = \sqrt{\frac{p_0}{\sqrt{\pi}\{1 - ip_0^2 B(z)\}}} \exp\left[-\frac{p_0^2}{2\{1 - ip_0^2 B(z)\}} t^2\right] \quad (4.103)$$

を得る。もちろん、式 (4.103) は (4.99) と一致する。式 (4.103) において、 $\beta_0^{(2)}$ を定数とすると、

$$u_0(z, t) = \sqrt{\frac{p_0}{\sqrt{\pi}\{1 - i(z - z^*)/z_d\}}} \exp\left[-\frac{p_0^2}{2\{1 - i(z - z^*)/z_d\}} t^2\right] \quad (4.104)$$

となる。ここで、 z^* は前置分散補償を考慮した場合に、 $z = 0$ からの累積分散が 0 となる距離である。また、 $z_d = (p_0^2 \beta_0^{(2)})^{-1}$ は分散距離である。

4.4 コヒーレント検波

受信器において、受信光 $U(L, t)$ はまず光フィルタによって波長チャネル毎に分波される。次に、コヒーレント検波器でチャネル毎に分離された信号光は局部発振連続光と合波される。バランス・ホモダイン検波を想定し、受信光と局部発振光の角周波数 ω は完全に一致していると仮定する。局部発振光の振幅を a_L とし、光電変換には二乗検波特性を持つ光検出器を用いるとすると、バランス干渉計の 2 つのアームの出力で検出される光電流はそれぞれ

$$I_{\pm}(t) = \frac{\eta e}{\hbar \omega} \left| \frac{a_L}{\sqrt{2}} \pm \frac{U(L, t)}{\sqrt{2}} \right|^2 \quad (4.105)$$

となる。ここで、 e は電子のもつ電荷量であり、 η は光検出器の量子効率である。2 つのアームからの出力電流を引き算すると、

$$\begin{aligned} I_f(t) &= I_+(t) - I_-(t) \\ &= \frac{\eta e}{\hbar \omega} \{a_L U^*(L, t) + a_L^* U(L, t)\} \\ &= A_L U^*(L, t) + A_L^* U(L, t) \\ &= 2 \operatorname{Re}[A_L^* U(L, t)] \\ &= 2 \operatorname{Re}[\mathcal{I}_f(t)] \end{aligned} \quad (4.106)$$

となり、局部発振光と信号光の積が得られる。ここで、 $A_L = [\eta e / (\hbar \omega)] a_L$ である。その後、 $\mathcal{I}_f(t)$ は光検出器の後段に配置された電気フィルタを通過した後、

$$\begin{aligned} \mathcal{I}'_f(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} u_f^*(\tau - t) \mathcal{I}_f(\tau) d\tau \\ &= A_L^* \int_{-\infty}^{\infty} u_f^*(\tau - t) U(L, \tau) d\tau \\ &= A_L^* \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}_f^*(\Delta\omega) \hat{U}(L, \Delta\omega) \exp(-i\Delta\omega t) d(\Delta\omega) \end{aligned} \quad (4.107)$$

となる。ここで、 $u_f(t)$ は電気フィルタのインパルス応答であり、その伝達関数 $\hat{u}_f(\Delta\omega)$ の逆フーリエ変換で与えられる。

$$u_f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}_f(\Delta\omega) \exp(-i\Delta\omega t) d(\Delta\omega) \quad (4.108)$$

このとき、 $t = T_k$ における検波された光電流の標本値は、式 (4.107) より

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_k &= \mathcal{I}'_f(t = T_k) \\ &= A_L^* \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}_f^*(\Delta\omega) \hat{U}(L, \Delta\omega) \exp(-i\Delta\omega T_k) d(\Delta\omega) \end{aligned} \quad (4.109)$$

となる。

ところで、受信器において、受信光 $U(L, t)$ のうち、光フィルタによって $s = 0$ の波長チャンネルが取り出されるものとする。このとき、式 (4.22) より受信信号に対応する送信信号は

$$u(0, t) = \sum_k a_k^{(0)} u_0(0, t - T_k) \quad (4.110)$$

である。次に、電気フィルタの伝達関数が次式で与えられるとする。

$$\hat{u}_f(\Delta\omega) = \hat{u}_0(0, \Delta\omega) \exp\left\{i \frac{(\Delta\omega)^2}{2} B(L)\right\} \quad (4.111)$$

このとき、電気フィルタのインパルス応答は

$$u_f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}_0(0, \Delta\omega) \exp\left[i \left\{ \frac{(\Delta\omega)^2}{2} B(L) - (\Delta\omega)t \right\}\right] d(\Delta\omega) \quad (4.112)$$

となる。まず、式 (4.61) および (4.111) を (4.109) に代入すると、

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_k &= A_L^* \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}_0^*(0, \Delta\omega) \exp(-i\Delta\omega T_k) [\hat{u}(0, \Delta\omega) + \widehat{\Delta u}'_{\text{pert}}(L, \Delta\omega)] d(\Delta\omega) \\ &= A_L^* \int_{-\infty}^{\infty} u_0^*(0, t - T_k) [u(0, t) + \Delta u'_{\text{pert}}(L, t)] dt \end{aligned} \quad (4.113)$$

となる。さらに、式 (4.110) を代入して (4.24) を用いると、

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_k &= A_L^* \left[\int_{-\infty}^{\infty} u_0^*(0, t - T_k) \left\{ \sum_{k'} a_{k'}^{(0)} u_0(0, t - T_{k'}) \right\} dt \right. \\ &\quad \left. + \int_{-\infty}^{\infty} u_0^*(0, t - T_k) \Delta u'_{\text{pert}}(L, t) dt \right] \\ &= A_L^* [a_k^{(0)} + \Delta a_k^{(0)}] \end{aligned} \quad (4.114)$$

となる。よって、 $s = 0$ の波長チャンネルの k 番目のパルスの複素情報信号 $a_k^{(0)}$ が取り出されることが分かる。ここで、

$$\begin{aligned} \Delta a_k^{(0)} &= \int_{-\infty}^{\infty} u_0^*(0, t - T_k) \Delta u'_{\text{pert}}(L, t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}_0^*(0, \Delta\omega) \widehat{\Delta u}'_{\text{pert}}(L, \Delta\omega) \exp(-i\Delta\omega T_k) d(\Delta\omega) \end{aligned} \quad (4.115)$$

は情報信号 $a_k^{(0)}$ に加わる雑音および非線形歪みを表す。また、式 (4.41) および (4.63) より

$$\begin{aligned}
\Delta u'_{\text{pert}}(L, t) &= -i \{u'_{\text{NS}}(L, t) - u'_{\text{NL}}(L, t)\} \\
&= -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^L \left[\frac{\hat{n}(\zeta, \Delta\omega)}{\sqrt{\mathcal{E}a_0(\zeta)}} - \frac{\gamma\mathcal{E}}{2\pi} a_0^2(\zeta) \right. \right. \\
&\quad \times \left. \left. \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}_L(\zeta, \Delta\omega_1) \hat{u}_L^*(\zeta, \Delta\omega_2) \hat{u}_L(\zeta, \Delta\omega - \Delta\omega_1 + \Delta\omega_2) d(\Delta\omega_1) d(\Delta\omega_2) \right] \right. \\
&\quad \times \left. \exp \left[-i \left\{ \frac{(\Delta\omega)^2}{2} B(\zeta) \right\} \right] d\zeta \right) \exp(-i\Delta\omega t) d(\Delta\omega) \quad (4.116)
\end{aligned}$$

である。

4.5 マスター方程式

式 (4.115)、(4.116) より

$$\Delta a_k^{(0)} = \Delta a_{k,\text{NS}}^{(0)} + \Delta a_{k,\text{NL}}^{(0)} \quad (4.117)$$

と書くことができる。ここで、

$$\begin{aligned}
\Delta a_{k,\text{NS}}^{(0)} &= -i \int_{-\infty}^{\infty} u_0^*(0, t - T_k) u'_{\text{NS}}(L, t) dt \\
&= -\frac{i}{\sqrt{\mathcal{E}}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0^*(0, t - T_k) \left\{ \int_0^L \frac{n(z, t)}{a_0(z)} dz \right\} dt \quad (4.118)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta a_{k,\text{NL}}^{(0)} &= i \int_{-\infty}^{\infty} u_0^*(0, t - T_k) u'_{\text{NL}}(L, t) dt \\
&= i \frac{\gamma\mathcal{E}}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0^*(0, t - T_k) \left[\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^L a_0^2(z) \right. \right. \\
&\quad \times \left. \left. \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}_L(z, \Delta\omega_1) \hat{u}_L^*(z, \Delta\omega_2) \hat{u}_L(z, \Delta\omega - \Delta\omega_1 + \Delta\omega_2) d(\Delta\omega_1) d(\Delta\omega_2) \right\} \right. \\
&\quad \times \left. \exp \left[-i \left\{ \frac{(\Delta\omega)^2}{2} B(z) + (\Delta\omega)t \right\} \right] dz \right) d(\Delta\omega) \right] dt \quad (4.119)
\end{aligned}$$

である。式 (4.119) の t に関する積分を実行すると、

$$\begin{aligned}
\Delta a_{k,\text{NL}}^{(0)} &= i \frac{\gamma\mathcal{E}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^L a_0^2(z) \right. \\
&\quad \times \left. \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}_L(z, \Delta\omega_1) \hat{u}_L^*(z, \Delta\omega_2) \hat{u}_L(z, \Delta\omega - \Delta\omega_1 + \Delta\omega_2) d(\Delta\omega_1) d(\Delta\omega_2) \right) \\
&\quad \times \hat{u}_0^*(0, \Delta\omega) \exp \left[-i \left\{ \frac{(\Delta\omega)^2}{2} B(z) + (\Delta\omega)T_k \right\} \right] dz \Big) d(\Delta\omega) \quad (4.120)
\end{aligned}$$

となる。さらに、上式に

$$\hat{u}_L(z, \Delta\omega - \Delta\omega_1 + \Delta\omega_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u_L(z, t) \exp\{i(\Delta\omega - \Delta\omega_1 + \Delta\omega_2)t\} dt \quad (4.121)$$

を代入し、

$$u_0^*(z, t - T_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}_0^*(0, \Delta\omega) \exp\left[-i\left\{\frac{(\Delta\omega)^2}{2}B(z) - (\Delta\omega)(t - T_k)\right\}\right] d(\Delta\omega) \quad (4.122)$$

であることを用いると、式 (4.120) は

$$\begin{aligned} \Delta a_{k, \text{NL}}^{(0)} &= i \frac{\gamma \mathcal{E}}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^L a_0^2(z) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}_L(z, \Delta\omega_1) \hat{u}_L^*(z, \Delta\omega_2) \right. \right. \\ &\quad \times \left. \left. \left[\int_{-\infty}^{\infty} u_L(z, t) \exp\{i(\Delta\omega - \Delta\omega_1 + \Delta\omega_2)t\} dt \right] d(\Delta\omega_1) d(\Delta\omega_2) \right\} \right. \\ &\quad \times \left. \hat{u}_0^*(0, \Delta\omega) \exp\left[-i\left\{\frac{(\Delta\omega)^2}{2}B(z) + (\Delta\omega)T_k\right\}\right] dz \right) d(\Delta\omega) \\ &= i\gamma \mathcal{E} \int_0^L a_0^2(z) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}_L(z, \Delta\omega_1) \exp(-i\Delta\omega_1 t) d(\Delta\omega_1) \right\} \right. \\ &\quad \times \left. \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}_L^*(z, \Delta\omega_2) \exp(i\Delta\omega_2 t) d(\Delta\omega_2) \right\} u_L(z, t) \right. \\ &\quad \times \left. \left. \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}_0^*(0, \Delta\omega) \exp\left[-i\left\{\frac{(\Delta\omega)^2}{2}B(z) - (\Delta\omega)(t - T_k)\right\}\right] d(\Delta\omega) \right] dt \right) dz \right) \\ &= i\gamma \mathcal{E} \int_0^L a_0^2(z) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |u_L(z, t)|^2 u_L(z, t) u_0^*(z, t - T_k) dt \right\} dz \quad (4.123) \end{aligned}$$

となる。以下では、式 (4.118) および (4.123) から ASE 雑音および非線形干渉雑音の大きさを求めていこう。

4.6 ASE 雑音の影響

式 (4.118) の二乗平均値は

$$\begin{aligned} \langle |\Delta a_{k, \text{NS}}^{(0)}|^2 \rangle &= \left\langle \frac{1}{\mathcal{E}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} u_0^*(0, t - T_k) \left\{ \int_0^L \frac{n(z, t)}{a_0(z)} dz \right\} dt \right] \right. \\ &\quad \times \left. \left[\int_{-\infty}^{\infty} u_0(0, t' - T_k) \left\{ \int_0^L \frac{n^*(z', t')}{a_0(z')} dz' \right\} dt' \right] \right\rangle \\ &= \frac{1}{\mathcal{E}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_0^*(0, t - T_k) u_0(0, t' - T_k) \end{aligned}$$

$$\times \left\{ \int_0^L \int_0^L \frac{\langle n(z, t) n^*(z', t') \rangle}{a_0(z) a_0(z')} dz dz' \right\} dt dt' \quad (4.124)$$

となる。上式に式 (4.4) を代入し、

$$\begin{aligned} \langle |\Delta a_{k, \text{NS}}^{(0)}|^2 \rangle &= \frac{1}{\mathcal{E}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_0^*(0, t - T_k) u_0(0, t' - T_k) \\ &\quad \times \left\{ \int_0^L \int_0^L \frac{C(z, t - t') \delta(z - z')}{a_0(z) a_0(z')} dz dz' \right\} dt dt' \\ &= \frac{1}{\mathcal{E}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_0^*(0, t - T_k) u_0(0, t' - T_k) \left\{ \int_0^L \frac{C(z, t - t')}{a_0^2(z)} dz \right\} dt dt' \\ &= \frac{1}{\mathcal{E}} \int_0^L \frac{1}{a_0^2(z)} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_0^*(0, t - T_k) u_0(0, t' - T_k) C(z, t - t') dt dt' \right\} dz \end{aligned} \quad (4.125)$$

となる。さらに、式 (4.5) を代入すると、

$$\begin{aligned} \langle |\Delta a_{k, \text{NS}}^{(0)}|^2 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \mathcal{E}} \int_0^L \frac{1}{a_0^2(z)} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_0^*(0, t - T_k) u_0(0, t' - T_k) \right. \\ &\quad \times \left[\int_{-\infty}^{\infty} \hat{C}(z, \Delta\omega) \exp\{-i\Delta\omega(t - t')\} d(\Delta\omega) \right] dt dt' \left. \right\} dz \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{\mathcal{E}} \int_0^L \frac{1}{a_0^2(z)} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0^*(0, t - T_k) \exp(-i\Delta\omega t) dt \right\} \right. \\ &\quad \times \left. \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(0, t' - T_k) \exp(i\Delta\omega t') dt' \right\} \hat{C}(z, \Delta\omega) d(\Delta\omega) \right] dz \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{\mathcal{E}} \int_0^L \frac{1}{a_0^2(z)} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}_0^*(0, \Delta\omega) \exp(-i\Delta\omega T_k) \right. \\ &\quad \times \left. \hat{u}_0(0, \Delta\omega) \exp(i\Delta\omega T_k) \hat{C}(z, \Delta\omega) d(\Delta\omega) \right] dz \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{\mathcal{E}} \int_0^L \frac{1}{a_0^2(z)} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{u}_0^*(0, \Delta\omega)|^2 \hat{C}(z, \Delta\omega) d(\Delta\omega) \right\} dz \end{aligned} \quad (4.126)$$

となり、 k に依存しない値となる。基本パルスの帯域内で、 $\hat{C}(z, \Delta\omega) \simeq \hat{C}(z, 0)$ と近似し、さらに、式 (4.27) を用いると、上式は

$$\begin{aligned} \langle |\Delta a_{k, \text{NS}}^{(0)}|^2 \rangle &\simeq \frac{\sqrt{2\pi}}{\mathcal{E}} \int_0^L \frac{\hat{C}(z, 0)}{a_0^2(z)} dz \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{u}_0^*(0, \Delta\omega)|^2 d(\Delta\omega) \right\} \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{\mathcal{E}} \int_0^L \frac{\hat{C}(z, 0)}{a_0^2(z)} dz \end{aligned} \quad (4.127)$$

となり、雑音の影響については、 $\langle |\Delta a_{k, \text{NS}}^{(0)}|^2 \rangle \propto \mathcal{E}^{-1}$ となることが分かる。さらに、式 (4.3) および (4.13) を代入すると、

$$\langle |\Delta a_{k, \text{NS}}^{(0)}|^2 \rangle = \frac{\hbar\omega_0}{\mathcal{E}} \int_0^L g(z) n_{\text{sp}}(z, 0) \exp\left\{-2 \int_0^z g(\zeta) d\zeta\right\} dz \quad (4.128)$$

となる。特に、 n_{sp} を定数と見なし、 $g(z) = -\alpha$ (α は定数) の場合には、

$$\begin{aligned} \langle |\Delta a_{k,\text{NS}}^{(0)}|^2 \rangle &= \frac{\hbar\omega_0 n_{\text{sp}} \alpha}{\mathcal{E}} \int_0^L \exp(2\alpha z) dz \\ &= \frac{\hbar\omega_0 n_{\text{sp}} \alpha \exp(2\alpha L) - 1}{\mathcal{E} \cdot 2\alpha} \\ &= \frac{\hbar\omega_0 n_{\text{sp}} \alpha L_{\text{eff}} \exp(2\alpha L)}{\mathcal{E}} \end{aligned} \quad (4.129)$$

となる。上式を導くに際して式 (3.96) を用いた。

4.7 チャンネル内相互作用の影響

まず、チャンネル内の非線形相互作用の影響について考えよう。式 (4.64) のうち、 $s = 0$ のチャンネルのみを取り出すと、

$$u_{\text{L}}(z, t) = \sum_k a_k^{(0)} u_0(z, t - T_k) \quad (4.130)$$

となる。式 (4.130) を (4.123) に代入すると、

$$\begin{aligned} \Delta a_{k,\text{intra}}^{(0)} &= i\gamma\mathcal{E} \int_0^L a_0^2(z) \left[\int_{-\infty}^{\infty} u_0^*(z, t - T_k) \left\{ \sum_{\ell} a_{\ell}^{(0)} u_0(z, t - T_{\ell}) \right\} \right. \\ &\quad \times \left. \left\{ \sum_m a_m^{(0)*} u_0^*(z, t - T_m) \right\} \left\{ \sum_n a_n^{(0)} u_0(z, t - T_n) \right\} dt \right] dz \\ &= i\gamma\mathcal{E} \sum_{\ell} \sum_m \sum_n a_{\ell}^{(0)} a_m^{(0)*} a_n^{(0)} \int_0^L a_0^2(z) \\ &\quad \times \left[\int_{-\infty}^{\infty} u_0^*(z, t - T_k) u_0(z, t - T_{\ell}) u_0^*(z, t - T_m) u_0(z, t - T_n) dt \right] dz \end{aligned} \quad (4.131)$$

となる。チャンネル内相互作用の影響については、 $|\Delta a_{k,\text{intra}}^{(0)}|^2 \propto \mathcal{E}^2$ となることが分かる。次章で詳しく示すように、チャンネル内相互作用の影響は様々な非線形補償法によって補償することが可能である。よって、以下に行う最大チャンネル容量の議論には、チャンネル内相互作用の影響は含めないことにする。

4.8 チャンネル間相互位相変調の影響 (I)

式 (4.64) より

$$|u_{\text{L}}(z, t)|^2 u_{\text{L}}(z, t)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{s_1} \sum_{\ell} a_{\ell}^{(s_1)} u_0(z, t - [T_{\ell} + t_{s_1}(z)]) \exp[-i\{\Omega_{s_1} t - \theta_{s_1}(z)\}] \\
&\quad \times \sum_{s_2} \sum_m a_m^{(s_2)*} u_0^*(z, t - [T_m + t_{s_2}(z)]) \exp[i\{\Omega_{s_2} t - \theta_{s_2}(z)\}] \\
&\quad \times \sum_{s_3} \sum_n a_n^{(s_3)} u_0(z, t - [T_n + t_{s_3}(z)]) \exp[-i\{\Omega_{s_3} t - \theta_{s_3}(z)\}] \\
&= \sum_{s_1} \sum_{s_2} \sum_{s_3} \sum_{\ell} \sum_m \sum_n a_{\ell}^{(s_1)} a_m^{(s_2)*} a_n^{(s_3)} \\
&\quad \times u_0(z, t - [T_{\ell} + t_{s_1}(z)]) u_0^*(z, t - [T_m + t_{s_2}(z)]) u_0(z, t - [T_n + t_{s_3}(z)]) \\
&\quad \times \exp(-i[(\Omega_{s_1} - \Omega_{s_2} + \Omega_{s_3})t - \{\theta_{s_1}(z) - \theta_{s_2}(z) + \theta_{s_3}(z)\}]) \quad (4.132)
\end{aligned}$$

となる。受信信号のうちで、 $s = 0$ のチャネルの帯域のみが光フィルタによって取り出されるので、式 (4.132) の信号のうちで、

$$\Omega_{s_1} - \Omega_{s_2} + \Omega_{s_3} = 0 \quad (4.133)$$

となる信号のみがコヒーレント受信される。よって、式 (4.132) のうち、

$$\begin{aligned}
&|u_L(z, t)|^2 u_L(z, t) \\
&= \sum_{s_1} \sum_{s_2} \sum_{\ell} \sum_m \sum_n a_{\ell}^{(s_1)} a_m^{(s_2)*} a_n^{(s_3)} \exp[i\{\theta_{s_1}(z) - \theta_{s_2}(z) + \theta_{s_3}(z)\}] \\
&\quad \times u_0(z, t - [T_{\ell} + t_{s_1}(z)]) u_0^*(z, t - [T_m + t_{s_2}(z)]) u_0(z, t - [T_n + t_{s_3}(z)]) \quad (4.134)
\end{aligned}$$

だけが受信される。さらに、相互位相変調 (XPM) の項のみを考えるために、 $\Omega_{s_1} = \Omega_{s_2}$ とすると、式 (4.133) より、 $\Omega_{s_3} = 0$ となるので、式 (4.134) は

$$\begin{aligned}
|u_L(z, t)|^2 u_L(z, t) &= \sum_s \sum_{\ell} \sum_m \sum_n a_{\ell}^{(s)} a_m^{(s)*} a_n^{(0)} \\
&\quad \times u_0(z, t - [T_{\ell} + t_s(z)]) u_0^*(z, t - [T_m + t_s(z)]) u_0(z, t - T_n) \quad (4.135)
\end{aligned}$$

となる。ここで、 $s_1 = s_2 = s, s_3 = 0$ とおいた。式 (4.135) を (4.123) に代入すると、

$$\Delta a_{k, \text{XPM}}^{(0)} = \sum_s \Delta a_{k, \text{XPM}, s}^{(0)} \quad (4.136)$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned}
\Delta a_{k, \text{XPM}, s}^{(0)} &= i\gamma \mathcal{E} \sum_{\ell} \sum_m \sum_n a_{\ell}^{(s)} a_m^{(s)*} a_n^{(0)} \int_0^L a_0^2(z) \\
&\quad \times \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} u_0(z, t - [T_{\ell} + t_s(z)]) u_0^*(z, t - [T_m + t_s(z)]) \right. \\
&\quad \left. \times u_0(z, t - T_n) u_0^*(z, t - T_k) dt \right\} dz \quad (4.137)
\end{aligned}$$

である。さらに、 ℓ と m の入れ換えをまとめて数えることにすると、

$$\Delta a_{k,\text{XPM},s}^{(0)} = 2i\gamma \frac{\mathcal{E}}{T} \sum_{\ell} \sum_m \sum_n a_{\ell}^{(s)} a_m^{(s)*} a_n^{(0)} C_{\ell,m,n} \quad (4.138)$$

となる。ここで、

$$C_{\ell,m,n} = T \int_0^L a_0^2(z) I_{\ell,m,n}(z) dz \quad (4.139)$$

であり、

$$\begin{aligned} I_{\ell,m,n}(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} u_0(z, t - [T_{\ell} + t_s(z)]) u_0^*(z, t - [T_m + t_s(z)]) \\ &\quad \times u_0(z, t - T_n) u_0^*(z, t - T_k) dt \end{aligned} \quad (4.140)$$

である。

複素情報信号 $a_{\ell}^{(s)}$ および $a_m^{(s)}$ の位相は、ランダムであり、それらの間には統計的に次式が成り立つものとする。

$$\langle a_{\ell}^{(s)} a_m^{(s)} \rangle = 0 \quad (4.141)$$

$$\langle a_{\ell}^{(s)} a_m^{(s)*} \rangle = \langle |a_{\ell}^{(s)}|^2 \rangle \delta_{\ell,m} \quad (4.142)$$

また、 $\Delta a_{k,\text{XPM},s}^{(0)}$ を平均値 $\langle \Delta a_{k,\text{XPM},s}^{(0)} \rangle$ とそのまわりの平均値 0 の変動値 $\delta a_{k,\text{XPM},s}^{(0)}$ に分離し、

$$\Delta a_{k,\text{XPM},s}^{(0)} = \langle \Delta a_{k,\text{XPM},s}^{(0)} \rangle + \delta a_{k,\text{XPM},s}^{(0)} \quad (4.143)$$

と表すことにしよう。このとき、式 (4.138)、(4.142) より平均値は

$$\begin{aligned} \langle \Delta a_{k,\text{XPM},s}^{(0)} \rangle &= \left\langle 2i\gamma \frac{\mathcal{E}}{T} \sum_{\ell} \sum_m \sum_n a_{\ell}^{(s)} a_m^{(s)*} a_n^{(0)} C_{\ell,m,n} \right\rangle \\ &= 2i\gamma \frac{\mathcal{E}}{T} \sum_{\ell} \sum_m \sum_n \langle a_{\ell}^{(s)} a_m^{(s)*} \rangle a_n^{(0)} C_{\ell,m,n} \\ &= 2i\gamma \frac{\mathcal{E}}{T} \sum_{\ell} \sum_n \langle |a_{\ell}^{(s)}|^2 \rangle a_n^{(0)} C_{\ell,\ell,n} \end{aligned} \quad (4.144)$$

と求められる。一方、 $\delta a_{k,\text{XPM},s}^{(0)}$ の二乗平均値は

$$\begin{aligned} &\langle |\delta a_{k,\text{XPM},s}^{(0)}|^2 \rangle \\ &= \langle |\Delta a_{k,\text{XPM},s}^{(0)} - \langle \Delta a_{k,\text{XPM},s}^{(0)} \rangle|^2 \rangle \\ &= \langle (\Delta a_{k,\text{XPM},s}^{(0)} - \langle \Delta a_{k,\text{XPM},s}^{(0)} \rangle) (\Delta a_{k,\text{XPM},s}^{(0)*} - \langle \Delta a_{k,\text{XPM},s}^{(0)*} \rangle) \rangle \\ &= 4\gamma^2 \frac{\mathcal{E}^2}{T^2} \left\langle \sum_{\ell} \sum_m \sum_n \sum_{\ell'} \sum_{m'} \sum_{n'} a_{\ell}^{(s)} a_m^{(s)*} a_n^{(0)} a_{\ell'}^{(s)*} a_{m'}^{(s)} a_{n'}^{(0)*} C_{\ell,m,n} C_{\ell',m',n'}^* \right\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{\ell} \sum_m \sum_n \sum_{\ell'} \sum_{n'} a_{\ell}^{(s)} a_m^{(s)*} a_n^{(0)} \langle |a_{\ell'}^{(s)}|^2 \rangle a_{n'}^{(0)*} C_{\ell,m,n} C_{\ell',\ell',n'}^* \\
& - \sum_{\ell} \sum_n \sum_{\ell'} \sum_{m'} \sum_{n'} \langle |a_{\ell}^{(s)}|^2 \rangle a_n^{(0)} a_{\ell'}^{(s)*} a_{m'}^{(s)} a_{n'}^{(0)*} C_{\ell,\ell,n} C_{\ell',m',n'}^* \\
& + \left. \sum_{\ell} \sum_n \sum_{\ell'} \sum_{n'} \langle |a_{\ell}^{(s)}|^2 \rangle a_n^{(0)} \langle |a_{\ell'}^{(s)}|^2 \rangle a_{n'}^{(0)*} C_{\ell,\ell,n} C_{\ell',\ell',n'}^* \right\} \\
& = 4\gamma^2 \frac{\mathcal{E}^2}{T^2} \left\{ \sum_{\ell} \sum_m \sum_n \sum_{\ell'} \sum_{m'} \sum_{n'} \langle a_{\ell}^{(s)} a_m^{(s)*} a_n^{(0)} a_{\ell'}^{(s)*} a_{m'}^{(s)} a_{n'}^{(0)*} \rangle C_{\ell,m,n} C_{\ell',m',n'}^* \right. \\
& - \sum_{\ell} \sum_m \sum_n \sum_{\ell'} \sum_{n'} \langle |a_{\ell'}^{(s)}|^2 \rangle \langle a_{\ell}^{(s)} a_m^{(s)*} a_n^{(0)} a_{n'}^{(0)*} \rangle C_{\ell,m,n} C_{\ell',\ell',n'}^* \\
& - \sum_{\ell} \sum_n \sum_{\ell'} \sum_{m'} \sum_{n'} \langle |a_{\ell}^{(s)}|^2 \rangle \langle a_n^{(0)} a_{\ell'}^{(s)*} a_{m'}^{(s)} a_{n'}^{(0)*} \rangle C_{\ell,\ell,n} C_{\ell',m',n'}^* \\
& + \left. \sum_{\ell} \sum_n \sum_{\ell'} \sum_{n'} \langle |a_{\ell}^{(s)}|^2 \rangle \langle |a_{\ell'}^{(s)}|^2 \rangle \langle a_n^{(0)} a_{n'}^{(0)*} \rangle C_{\ell,\ell,n} C_{\ell',\ell',n'}^* \right\} \\
& = 4\gamma^2 \frac{\mathcal{E}^2}{T^2} \left\{ \sum_{\ell} \sum_m \sum_n \sum_{\ell'} \sum_{m'} \sum_{n'} \langle a_{\ell}^{(s)} a_m^{(s)*} a_{\ell'}^{(s)*} a_{m'}^{(s)} \rangle \langle a_n^{(0)} a_{n'}^{(0)*} \rangle C_{\ell,m,n} C_{\ell',m',n'}^* \right. \\
& - \sum_{\ell} \sum_m \sum_n \sum_{\ell'} \sum_{n'} \langle |a_{\ell'}^{(s)}|^2 \rangle \langle a_{\ell}^{(s)} a_m^{(s)*} \rangle \langle a_n^{(0)} a_{n'}^{(0)*} \rangle C_{\ell,m,n} C_{\ell',\ell',n'}^* \\
& - \sum_{\ell} \sum_n \sum_{\ell'} \sum_{m'} \sum_{n'} \langle |a_{\ell}^{(s)}|^2 \rangle \langle a_{\ell'}^{(s)*} a_{m'}^{(s)} \rangle \langle a_n^{(0)} a_{n'}^{(0)*} \rangle C_{\ell,\ell,n} C_{\ell',m',n'}^* \\
& + \left. \sum_{\ell} \sum_n \sum_{\ell'} \sum_{n'} \langle |a_{\ell}^{(s)}|^2 \rangle \langle |a_{\ell'}^{(s)}|^2 \rangle \langle a_n^{(0)} a_{n'}^{(0)*} \rangle C_{\ell,\ell,n} C_{\ell',\ell',n'}^* \right\} \\
& = 4\gamma^2 \frac{\mathcal{E}^2}{T^2} \sum_n \langle |a_n^{(0)}|^2 \rangle \left\{ \sum_{\ell} \sum_m \sum_{\ell'} \sum_{m'} \langle a_{\ell}^{(s)} a_m^{(s)*} a_{\ell'}^{(s)*} a_{m'}^{(s)} \rangle C_{\ell,m,n} C_{\ell',m',n}^* \right. \\
& - \sum_{\ell} \sum_m \sum_{\ell'} \langle |a_{\ell'}^{(s)}|^2 \rangle \langle a_{\ell}^{(s)} a_m^{(s)*} \rangle C_{\ell,m,n} C_{\ell',\ell',n}^* \\
& - \sum_{\ell} \sum_{\ell'} \sum_{m'} \langle |a_{\ell}^{(s)}|^2 \rangle \langle a_{\ell'}^{(s)*} a_{m'}^{(s)} \rangle C_{\ell,\ell,n} C_{\ell',m',n}^* \\
& + \left. \sum_{\ell} \sum_{\ell'} \langle |a_{\ell}^{(s)}|^2 \rangle \langle |a_{\ell'}^{(s)}|^2 \rangle C_{\ell,\ell,n} C_{\ell',\ell',n}^* \right\} \\
& = 4\gamma^2 \frac{\mathcal{E}^2}{T^2} \sum_n \langle |a_n^{(0)}|^2 \rangle \left\{ \sum_{\ell} \sum_{m(\neq \ell)} \langle |a_{\ell}^{(s)}|^2 |a_m^{(s)}|^2 \rangle |C_{\ell,m,n}|^2 \right. \\
& + \sum_{\ell} \sum_{\ell'} \langle |a_{\ell}^{(s)}|^2 |a_{\ell'}^{(s)}|^2 \rangle C_{\ell,\ell,n} C_{\ell',\ell',n}^* \\
& - \sum_{\ell} \sum_{\ell'} \langle |a_{\ell}^{(s)}|^2 \rangle \langle |a_{\ell'}^{(s)}|^2 \rangle C_{\ell,\ell,n} C_{\ell',\ell',n}^* \\
& - \sum_{\ell} \sum_{\ell'} \langle |a_{\ell}^{(s)}|^2 \rangle \langle |a_{\ell'}^{(s)}|^2 \rangle C_{\ell,\ell,n} C_{\ell',\ell',n}^* \\
& + \left. \sum_{\ell} \sum_{\ell'} \langle |a_{\ell}^{(s)}|^2 \rangle \langle |a_{\ell'}^{(s)}|^2 \rangle C_{\ell,\ell,n} C_{\ell',\ell',n}^* \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 4\gamma^2 \frac{\mathcal{E}^2}{T^2} \sum_n \langle |a_n^{(0)}|^2 \rangle \left\{ \sum_\ell \sum_{m(\neq \ell)} \langle |a_\ell^{(s)}|^2 \rangle \langle |a_m^{(s)}|^2 \rangle |C_{\ell,m,n}|^2 \right. \\
&+ \sum_\ell \langle |a_\ell^{(s)}|^4 \rangle |C_{\ell,\ell,n}|^2 + \sum_\ell \sum_{\ell'(\neq \ell)} \langle |a_\ell^{(s)}|^2 \rangle \langle |a_{\ell'}^{(s)}|^2 \rangle C_{\ell,\ell,n} C_{\ell',\ell',n}^* \\
&- \left. \sum_\ell \sum_{\ell'} \langle |a_\ell^{(s)}|^2 \rangle \langle |a_{\ell'}^{(s)}|^2 \rangle C_{\ell,\ell,n} C_{\ell',\ell',n}^* \right\} \\
&= 4\gamma^2 \frac{\mathcal{E}^2}{T^2} \sum_n \langle |a_n^{(0)}|^2 \rangle \left\{ \sum_\ell \sum_{m(\neq \ell)} \langle |a_\ell^{(s)}|^2 \rangle \langle |a_m^{(s)}|^2 \rangle |C_{\ell,m,n}|^2 \right. \\
&+ \left. \sum_\ell \langle |a_\ell^{(s)}|^4 \rangle |C_{\ell,\ell,n}|^2 - \sum_\ell (\langle |a_\ell^{(s)}|^2 \rangle)^2 |C_{\ell,\ell,n}|^2 \right\} \\
&= 4\gamma^2 \frac{\mathcal{E}^2}{T^2} \sum_n \langle |a_n^{(0)}|^2 \rangle \left\{ \sum_\ell \sum_{m(\neq \ell)} \langle |a_\ell^{(s)}|^2 \rangle \langle |a_m^{(s)}|^2 \rangle |C_{\ell,m,n}|^2 \right. \\
&+ \left. \sum_\ell \{ \langle |a_\ell^{(s)}|^4 \rangle - (\langle |a_\ell^{(s)}|^2 \rangle)^2 \} |C_{\ell,\ell,n}|^2 \right\} \tag{4.145}
\end{aligned}$$

となる。ところで、 $a_k^{(s)}$ はランダム変数であるので、 $\langle |a_k^{(s)}|^{2m} \rangle$, ($m = 1, 2$) は k に依存しない値 $\langle |a^{(s)}|^m \rangle$ に置き換えることができる。よって、式 (4.144) および (4.145) は

$$\langle \Delta a_{k,\text{XPM},s}^{(0)} \rangle = 2i\gamma \frac{\mathcal{E}}{T} \langle |a^{(s)}|^2 \rangle \sum_\ell \sum_n a_n^{(0)} C_{\ell,\ell,n} \tag{4.146}$$

$$\begin{aligned}
\langle |\delta a_{k,\text{XPM},s}^{(0)}|^2 \rangle &= 4\gamma^2 \frac{\mathcal{E}^2}{T^2} \langle |a^{(0)}|^2 \rangle \left\{ (\langle |a^{(s)}|^2 \rangle)^2 \sum_\ell \sum_{m(\neq \ell)} \sum_n |C_{\ell,m,n}|^2 \right. \\
&+ \left. \{ \langle |a^{(s)}|^4 \rangle - (\langle |a^{(s)}|^2 \rangle)^2 \} \sum_\ell \sum_n |C_{\ell,\ell,n}|^2 \right\} \tag{4.147}
\end{aligned}$$

となる。

4.9 任意の入力パルス波形の線形伝搬

任意の入力パルス波形の線形伝搬を表す解を停留位相法を適用して求めてみよう。式 (4.54) より

$$u_0(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}_0(0, \Delta\omega) \exp \left[i \left\{ \frac{(\Delta\omega)^2}{2} B(z) - (\Delta\omega)t \right\} \right] d(\Delta\omega) \tag{4.148}$$

である。ここで、

$$\hat{u}_0(0, \Delta\omega) = |\hat{u}_0(\Delta\omega)| \exp\{i\phi(\Delta\omega)\} \quad (4.149)$$

とおくと、式(4.148)は

$$u_0(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{u}_0(\Delta\omega)| \exp\{i\psi(\Delta\omega)\} d(\Delta\omega) \quad (4.150)$$

となる。ここで、

$$\psi(\Delta\omega) = \phi(\Delta\omega) + \frac{(\Delta\omega)^2}{2} B(z) - (\Delta\omega)t \quad (4.151)$$

である。このとき、

$$\frac{\partial\{\psi(\Delta\omega)\}}{\partial(\Delta\omega)} = \frac{\partial\{\phi(\Delta\omega)\}}{\partial(\Delta\omega)} + B(z) (\Delta\omega) - t \simeq B(z) (\Delta\omega) - t \quad (4.152)$$

$$\frac{\partial^2\{\psi(\Delta\omega)\}}{\partial(\Delta\omega)^2} = \frac{\partial^2\{\phi(\Delta\omega)\}}{\partial(\Delta\omega)^2} + B(z) \simeq B(z) \quad (4.153)$$

となる。ここで、パルスの中心スペクトル付近では、 $\partial\{\phi(\Delta\omega)\}/\partial(\Delta\omega) \simeq 0$ 、 $\partial^2\{\phi(\Delta\omega)\}/\partial(\Delta\omega)^2 \simeq 0$ であることを用いた。式(4.152)が零となる角周波数は

$$\overline{\Delta\omega} = \frac{t}{B(z)} \quad (4.154)$$

である。式(4.150)の積分範囲で、この角周波数付近の被積分関数値のみが積分値に寄与する。よって、式(4.151)を $\overline{\Delta\omega}$ のまわりでテーラー展開し、2次の項までで近似し、さらに、 $|\hat{u}_0(\Delta\omega)| \simeq |\hat{u}_0(\overline{\Delta\omega})|$ と近似すると、

$$\begin{aligned} u_0(z, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{u}_0(\overline{\Delta\omega})| \exp \left[i \left\{ \psi(\overline{\Delta\omega}) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2\{\psi(\Delta\omega)\}}{\partial(\Delta\omega)^2} \Big|_{\Delta\omega=\overline{\Delta\omega}} (\Delta\omega - \overline{\Delta\omega})^2 \right\} \right] d(\Delta\omega) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} |\hat{u}_0(\overline{\Delta\omega})| \exp\{i\psi(\overline{\Delta\omega})\} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ \frac{i}{2} \frac{\partial^2\{\psi(\Delta\omega)\}}{\partial(\Delta\omega)^2} \Big|_{\Delta\omega=\overline{\Delta\omega}} (\Delta\omega - \overline{\Delta\omega})^2 \right\} d(\Delta\omega) \end{aligned} \quad (4.155)$$

となる。式(4.151)に(4.154)を代入すると、

$$\psi(\overline{\Delta\omega}) = \frac{B(z)}{2} \left\{ \frac{t}{B(z)} \right\}^2 - \left\{ \frac{t}{B(z)} \right\} t = -\frac{t^2}{2B(z)} \quad (4.156)$$

となる。ここで、 $\phi(\overline{\Delta\omega}) \simeq 0$ であることを用いた。式(4.153)と(4.156)を(4.155)に代入すると、

$$u_0(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \hat{u}_0 \left(\frac{t}{B(z)} \right) \right| \exp \left\{ -i \frac{t^2}{2B(z)} \right\} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ \frac{i}{2} B(z) (\Delta\omega - \overline{\Delta\omega})^2 \right\} d(\Delta\omega)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \hat{u}_0 \left(\frac{t}{B(z)} \right) \right| \exp \left\{ -i \frac{t^2}{2B(z)} \right\} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ \frac{i}{2} B(z) x^2 \right\} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \hat{u}_0 \left(\frac{t}{B(z)} \right) \right| \exp \left\{ -i \frac{t^2}{2B(z)} \right\} \sqrt{\frac{\pi}{-\frac{i}{2} B(z)}} \\
&= \sqrt{\frac{i}{B(z)}} \exp \left\{ -i \frac{t^2}{2B(z)} \right\} \left| \hat{u}_0 \left(\frac{t}{B(z)} \right) \right| \tag{4.157}
\end{aligned}$$

となる。入力パルス波形が式 (4.100) で与えられるガウス形パルスの場合について、式 (4.101) を (4.157) に代入すると、

$$\begin{aligned}
u_0(z, t) &= \sqrt{\frac{i}{B(z)}} \exp \left\{ -i \frac{t^2}{2B(z)} \right\} \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi} p_0}} \exp \left[-\frac{1}{2p_0^2} \left\{ \frac{t}{B(z)} \right\}^2 \right] \\
&= \sqrt{\frac{i}{\sqrt{\pi} p_0 B(z)}} \exp \left[-\frac{t^2}{2p_0^2 B^2(z)} \{1 + ip_0^2 B(z)\} \right] \tag{4.158}
\end{aligned}$$

となり、式 (4.103) において、 $|p_0^2 B(z)| \gg 1$ とした場合に一致する。

4.10 チャネル間相互位相変調の影響 (II)

式 (4.157) を (4.140) に代入すると、

$$\begin{aligned}
I_{\ell, m, n}(z) &= \frac{1}{B^2(z)} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -i \frac{(t - [T_\ell + t_s(z)])^2}{2B(z)} \right\} \left| \hat{u}_0 \left(\frac{t - [T_\ell + t_s(z)]}{B(z)} \right) \right| \\
&\quad \times \exp \left\{ i \frac{(t - [T_m + t_s(z)])^2}{2B(z)} \right\} \left| \hat{u}_0 \left(\frac{t - [T_m + t_s(z)]}{B(z)} \right) \right| \\
&\quad \times \exp \left\{ -i \frac{(t - T_n)^2}{2B(z)} \right\} \left| \hat{u}_0 \left(\frac{t - T_n}{B(z)} \right) \right| \exp \left\{ i \frac{(t - T_k)^2}{2B(z)} \right\} \left| \hat{u}_0 \left(\frac{t - T_k}{B(z)} \right) \right| dt \\
&= \frac{1}{B^2(z)} \int_{-\infty}^{\infty} \\
&\quad \times \exp \left\{ -i \frac{(t - [T_\ell + t_s(z)])^2 - (t - [T_m + t_s(z)])^2 + (t - T_n)^2 - (t - T_k)^2}{2B(z)} \right\} \\
&\quad \times \left| \hat{u}_0 \left(\frac{t - [T_\ell + t_s(z)]}{B(z)} \right) \right| \left| \hat{u}_0 \left(\frac{t - [T_m + t_s(z)]}{B(z)} \right) \right| \left| \hat{u}_0 \left(\frac{t - T_n}{B(z)} \right) \right| \left| \hat{u}_0 \left(\frac{t - T_k}{B(z)} \right) \right| dt \\
&= \frac{1}{B^2(z)} \exp \left\{ -i \frac{T_\ell^2 - T_m^2 + T_n^2 - T_k^2 + 2(T_\ell - T_m)t_s(z)}{2B(z)} \right\} \\
&\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ i \frac{T_\ell - T_m + T_n - T_k}{B(z)} t \right\} \\
&\quad \times \left| \hat{u}_0 \left(\frac{t - [T_\ell + t_s(z)]}{B(z)} \right) \right| \left| \hat{u}_0 \left(\frac{t - [T_m + t_s(z)]}{B(z)} \right) \right| \left| \hat{u}_0 \left(\frac{t - T_n}{B(z)} \right) \right| \left| \hat{u}_0 \left(\frac{t - T_k}{B(z)} \right) \right| dt \tag{4.159}
\end{aligned}$$

となる。新しい変数

$$\hat{\Omega} = \frac{t - T_k}{B(z)} \quad (4.160)$$

を導入して変数変換を行うと、式 (4.159) は

$$\begin{aligned} I_{\ell,m,n}(z) &= \frac{1}{|B(z)|} \exp \left[-i \frac{(T_\ell - T_k)^2 - (T_m - T_k)^2 + (T_n - T_k)^2}{2B(z)} \right] \\ &\times \exp \left[-i \frac{\{(T_\ell - T_k) - (T_m - T_k)\} t_s(z)}{B(z)} \right] \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \exp [i\{(T_\ell - T_k) - (T_m - T_k) + (T_n - T_k)\}\hat{\Omega}] \\ &\times \left| \hat{u}_0 \left(\hat{\Omega} - \frac{T_\ell - T_k + \delta T_s}{B(z)} - \Omega_s \right) \right| \left| \hat{u}_0 \left(\hat{\Omega} - \frac{T_m - T_k + \delta T_s}{B(z)} - \Omega_s \right) \right| \\ &\times \left| \hat{u}_0 \left(\hat{\Omega} - \frac{T_n - T_k}{B(z)} \right) \right| \left| \hat{u}_0(\hat{\Omega}) \right| d\hat{\Omega} \end{aligned} \quad (4.161)$$

となる。さらに、 $T_{j'} = T_j - T_k$, ($j = \ell, m, n$) とすると、

$$I_{\ell',m',n'}(z) = \frac{\sqrt{2\pi}}{|B(z)|} \exp \left\{ -i \frac{T_{\ell'}^2 - T_{m'}^2 + T_{n'}^2}{2B(z)} \right\} \exp \left[-i(T_{\ell'} - T_{m'}) \left\{ \Omega_s + \frac{\delta T_s}{B(z)} \right\} \right] F_{\ell',m',n'}(z) \quad (4.162)$$

となる。ここで、

$$F_{\ell',m',n'}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{i(T_{\ell'} - T_{m'} + T_{n'})\hat{\Omega}\} K_{\ell',m',n'}(z, \hat{\Omega}) d\hat{\Omega} \quad (4.163)$$

$$\begin{aligned} K_{\ell',m',n'}(z, \hat{\Omega}) &= \left| \hat{u}_0 \left(\hat{\Omega} - \frac{T_{\ell'} + \delta T_s}{B(z)} - \Omega_s \right) \right| \left| \hat{u}_0 \left(\hat{\Omega} - \frac{T_{m'} + \delta T_s}{B(z)} - \Omega_s \right) \right| \\ &\times \left| \hat{u}_0 \left(\hat{\Omega} - \frac{T_{n'}}{B(z)} \right) \right| \left| \hat{u}_0(\hat{\Omega}) \right| \end{aligned} \quad (4.164)$$

である。 $F_{\ell',m',n'}(z)$ は $K_{\ell',m',n'}(z, \hat{\Omega})$ の逆フーリエ変換を表し、停留位相法の考え方を適用すると、 $T_{\ell'} - T_{m'} + T_{n'} = 0$ となる時に積分への寄与が大きくなる。そのため、以下では、 $T_{m'} = T_{\ell'} + T_{n'}$ となる場合について考えることにしよう。また、式 (4.162) は、 T_k を基準とする相対的な時間差 $T_{j'}$ のみの関数であり、 T_k を陽には含まないことから、 $T_{k=0} = 0$ の場合を考えればよいことが分かる。以下では、 $T_{k=0} = 0$ として、 $T_{j'} = T_j$, ($j = \ell, m, n$) の場合について考える。

まず、式(4.162)-(4.164)に $T_m = T_\ell + T_n$ を代入すると、

$$\begin{aligned}
I_{\ell,\ell+n,n}(z) &= \frac{1}{|B(z)|} \exp\left\{i\frac{T_\ell T_n}{B(z)}\right\} \exp\left[iT_n\left\{\Omega_s + \frac{\delta T_s}{B(z)}\right\}\right] \\
&\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} K_{\ell,\ell+n,n}(z, \hat{\Omega}) d\hat{\Omega} \\
&= \frac{1}{|B(z)|} \exp(i\Omega_s T_n) \exp\left\{i\frac{(T_\ell + \delta T_s)T_n}{B(z)}\right\} \\
&\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} \left| \hat{u}_0\left(\hat{\Omega} - \frac{T_\ell + \delta T_s}{B(z)} - \Omega_s\right) \right| \left| \hat{u}_0\left(\hat{\Omega} - \frac{T_n + T_\ell + \delta T_s}{B(z)} - \Omega_s\right) \right| \\
&\quad \times \left| \hat{u}_0\left(\hat{\Omega} - \frac{T_n}{B(z)}\right) \right| \left| \hat{u}_0(\hat{\Omega}) \right| d\hat{\Omega} \tag{4.165}
\end{aligned}$$

となる。

また、式(4.143)で定義した $\delta a_{0,\text{XPM},s}^{(0)}$ は次式のようになる。式(4.138)、(4.144)より、

$$\begin{aligned}
\delta a_{0,\text{XPM},s}^{(0)} &= 2i\gamma \frac{\mathcal{E}}{T} \left\{ \sum_{\ell} \sum_{\ell} a_{\ell}^{(s)} a_{\ell}^{(s)*} a_0^{(0)} C_{\ell,\ell,0} + \sum_{\ell} \sum_{\ell+n} \sum_{n(\neq 0)} a_{\ell}^{(s)} a_{\ell+n}^{(s)*} a_n^{(0)} C_{\ell,\ell+n,n} \right. \\
&\quad \left. - \sum_{\ell} \langle |a_{\ell}^{(s)}|^2 \rangle a_0^{(0)} C_{\ell,\ell,0} - \sum_{\ell} \sum_{n(\neq 0)} \langle |a_{\ell}^{(s)}|^2 \rangle a_n^{(0)} C_{\ell,\ell,n} \right\} \\
&= 2i\gamma \frac{\mathcal{E}}{T} \left\{ a_0^{(0)} \sum_{\ell} |a_{\ell}^{(s)}|^2 C_{\ell,\ell,0} + \sum_{\ell} \sum_{n(\neq 0)} a_{\ell}^{(s)} a_{\ell+n}^{(s)*} a_n^{(0)} C_{\ell,\ell+n,n} \right. \\
&\quad \left. - a_0^{(0)} \sum_{\ell} \langle |a_{\ell}^{(s)}|^2 \rangle C_{\ell,\ell,0} - \langle |a^{(s)}|^2 \rangle \sum_{\ell} \sum_{n(\neq 0)} a_n^{(0)} C_{\ell,\ell,n} \right\} \\
&= 2i\gamma \frac{\mathcal{E}}{T} \left\{ a_0^{(0)} \sum_{\ell} (|a_{\ell}^{(s)}|^2 - \langle |a_{\ell}^{(s)}|^2 \rangle) C_{\ell,\ell,0} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{\ell} \sum_{n(\neq 0)} a_{\ell}^{(s)} a_{\ell+n}^{(s)*} a_n^{(0)} C_{\ell,\ell+n,n} - \langle |a^{(s)}|^2 \rangle \sum_{\ell} \sum_{n(\neq 0)} a_n^{(0)} C_{\ell,\ell,n} \right\} \tag{4.166}
\end{aligned}$$

となる。 $a_n^{(0)}$ はランダムな複素変数であるので、その和で表される上式の最終項は零となる。よって、 $\delta a_{0,\text{XPM},s}^{(0)}$ は次式のように2つに分離することができる。

$$\delta a_{0,\text{XPM},s}^{(0)} = 2\gamma \frac{\mathcal{E}}{T} (A_0 + A_1) \tag{4.167}$$

ここで、

$$A_0 = ia_0^{(0)} \sum_{\ell} (|a_{\ell}^{(s)}|^2 - \langle |a_{\ell}^{(s)}|^2 \rangle) C_{\ell,\ell,0} \tag{4.168}$$

$$A_1 = i \sum_{\ell} \sum_{n(\neq 0)} a_{\ell}^{(s)} a_{\ell+n}^{(s)*} a_n^{(0)} C_{\ell,\ell+n,n} \tag{4.169}$$

である。ところで、式(4.165)で $n = 0$ とすると、 $T_{n=0} = 0$ であるので、

$$I_{\ell,\ell,0}(z) = \frac{1}{|B(z)|} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \hat{u}_0 \left(\hat{\Omega} - \frac{T_\ell + \delta T_s}{B(z)} - \Omega_s \right) \right|^2 |\hat{u}_0(\hat{\Omega})|^2 d\hat{\Omega} \quad (4.170)$$

となる。この場合、 $I_{\ell,\ell,0}$ は実数となり、式(4.139)より、 $C_{\ell,\ell,0}$ も実数となる。よって、式(4.168)に示す A_0 は $a_0^{(0)}$ と直交しており、平均が零 ($\langle |a_\ell^{(s)}|^2 \rangle - \langle |a_\ell^{(s)}|^2 \rangle = 0$) の純粋な位相雑音を表す。また、パルス振幅が一定の純粋な位相変調方式では、 $|a_\ell^{(s)}|^2 - \langle |a_\ell^{(s)}|^2 \rangle = 0$ となるので、 $A_0 = 0$ である。一方、 $a_n^{(0)}$ や $a_\ell^{(s)}$ の位相対称性から、 A_1 は対称的な位相分布を表し、純粋な位相変調を表す。よって、振幅揺らぎに寄与する項は A_1 のみであるが、振幅と位相が変調されたシステムでは、一般的に A_1 よりも A_0 が支配的となる。

以下では、具体的なパルス波形を考えて、式(4.165)に示した $I_{\ell,\ell+n,n}(z)$ を具体的に計算してみよう。ナイキストWDM伝送を考え、基本パルスの周波数スペクトルは次式で与えられる帯域幅がチャネル間隔 W に等しい矩形スペクトルとする。

$$\hat{u}_0(0, \Delta\omega) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\Omega}} & |\Delta\omega| < \Omega/2 \\ 0 & |\Delta\omega| > \Omega/2 \end{cases} \quad (4.171)$$

このとき、 $\hat{u}_0(0, \Delta\omega)$ は式(4.27)を満足する。式(4.171)を逆フーリエ変換すると、基本パルスの時間波形は

$$\begin{aligned} u_0(0, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\Omega/2}^{\Omega/2} \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \exp(-i\Delta\omega t) d(\Delta\omega) \\ &= \frac{\Omega}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{sinc}\left(\frac{\Omega}{2} t\right) \end{aligned} \quad (4.172)$$

となる。式(4.172)がナイキスト条件を満たすためには、シンボル間隔 T について、

$$\Omega T = 2\pi \quad (4.173)$$

となる必要がある。よって、 T を用いると、式(4.172)は

$$u_0(0, t) = \frac{\sqrt{2\pi}}{T} \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{T} t\right) \quad (4.174)$$

と表される。

式(4.165)の右辺に表われる積分の被積分関数は、第 s チャネルの ℓ 番目と $\ell + n$ 番目のパルスおよび第 0 チャネルの 0 番目と n 番目のパルスの4つのパルスが重なっている場合にのみ非零となる。それらのパルスの時間的拡がり、式(4.160)、(4.165)、(4.171)より、次式を t について解くことによって求められる。

$$\left| \frac{t - \{T_\ell + \delta T_s + \Omega_s B(z)\}}{B(z)} \right| \leq \frac{\Omega}{2} \quad (4.175)$$

$$\left| \frac{t - \{T_n + T_\ell + \delta T_s + \Omega_s B(z)\}}{B(z)} \right| \leq \frac{\Omega}{2} \quad (4.176)$$

$$\left| \frac{t}{B(z)} \right| \leq \frac{\Omega}{2} \quad (4.177)$$

$$\left| \frac{t - T_n}{B(z)} \right| \leq \frac{\Omega}{2} \quad (4.178)$$

$B(z)$ が任意の関数のままでは、4つのパルスが重なる時間幅を簡単に表すことは難しい。そのため、 $B(z)$ が式 (4.104) と同様に、 $B(z) = \beta_0^{(2)}(z - z^*)$ となる場合について考える。まず、 $T_n > 0$ 、 $\beta_0^{(2)} > 0$ 、 $\Omega_s > 0$ の場合について考える。図 4.1 の斜線は、式 (4.177) と (4.178) の表す領域が重なる領域を示す。

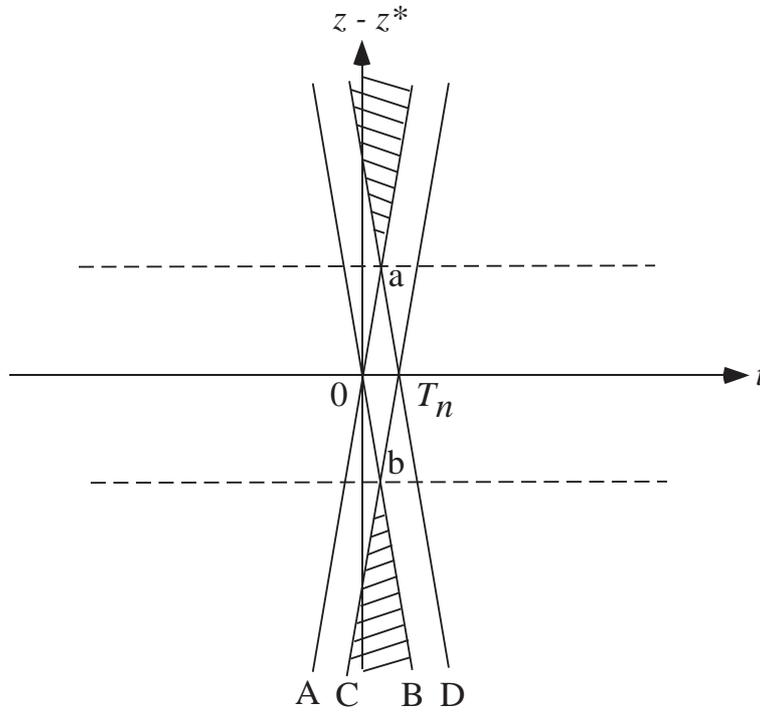


図 4.1: 式 (4.177) と (4.178) の表す領域が重なる領域

図 4.1 中の 4本の直線は、式 (4.177) および (4.178) より、

$$A: t = \frac{\Omega}{2} \beta_0^{(2)} (z - z^*) \quad (4.179)$$

$$B: t = -\frac{\Omega}{2} \beta_0^{(2)} (z - z^*) \quad (4.180)$$

$$C: t = T_n + \frac{\Omega}{2} \beta_0^{(2)} (z - z^*) \quad (4.181)$$

$$D: t = T_n - \frac{\Omega}{2} \beta_0^{(2)} (z - z^*) \quad (4.182)$$

となる。よって、図 4.1 中に示す 2 本の直線の交点は、式 (4.179)-(4.182) より

$$a : A \text{ と } D \text{ の交点} \quad (t, z - z^*) = \left(\frac{T_n}{2}, \frac{T_n}{\Omega\beta_0^{(2)}} \right) \quad (4.183)$$

$$b : B \text{ と } C \text{ の交点} \quad (t, z - z^*) = \left(\frac{T_n}{2}, -\frac{T_n}{\Omega\beta_0^{(2)}} \right) \quad (4.184)$$

となる。このとき、斜線部分は

$$z - z^* > \frac{T_n}{\Omega\beta_0^{(2)}} \text{ のとき} \quad T_n - \frac{\Omega}{2}\beta_0^{(2)}(z - z^*) \leq t \leq \frac{\Omega}{2}\beta_0^{(2)}(z - z^*) \quad (4.185)$$

$$|z - z^*| < \frac{T_n}{\Omega\beta_0^{(2)}} \text{ のとき} \quad \text{なし} \quad (4.186)$$

$$z - z^* < -\frac{T_n}{\Omega\beta_0^{(2)}} \text{ のとき} \quad T_n + \frac{\Omega}{2}\beta_0^{(2)}(z - z^*) \leq t \leq -\frac{\Omega}{2}\beta_0^{(2)}(z - z^*) \quad (4.187)$$

と表される。

図 4.2 の斜線は、式 (4.175) と (4.176) の表す領域が重なる領域を示す。

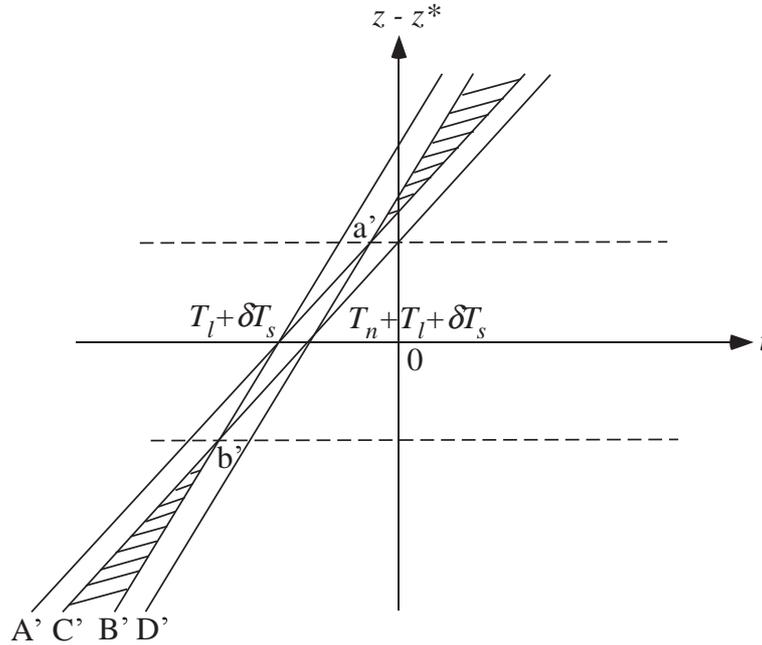


図 4.2: 式 (4.175) と (4.176) の表す領域が重なる領域

図 4.2 中の 4 本の直線は、式 (4.175) および (4.176) より、

$$A' : t = T_l + \delta T_s + \left(\Omega_s + \frac{\Omega}{2} \right) \beta_0^{(2)}(z - z^*) \quad (4.188)$$

$$B' : t = T_\ell + \delta T_s + \left(\Omega_s - \frac{\Omega}{2}\right) \beta_0^{(2)}(z - z^*) \quad (4.189)$$

$$C' : t = T_n + T_\ell + \delta T_s + \left(\Omega_s + \frac{\Omega}{2}\right) \beta_0^{(2)}(z - z^*) \quad (4.190)$$

$$D' : t = T_n + T_\ell + \delta T_s + \left(\Omega_s - \frac{\Omega}{2}\right) \beta_0^{(2)}(z - z^*) \quad (4.191)$$

となる。よって、図 4.2 中に示す 2 本の直線の交点は、式 (4.188)-(4.191) より

$$a' : A' \text{ と } D' \text{ の交点 } (t, z - z^*) = \left(\frac{T_n}{2} + T_\ell + \delta T_s + \Omega_s \beta_0^{(2)}(z - z^*), \frac{T_n}{\Omega \beta_0^{(2)}} \right) \quad (4.192)$$

$$b' : B' \text{ と } C' \text{ の交点 } (t, z - z^*) = \left(\frac{T_n}{2} + T_\ell + \delta T_s + \Omega_s \beta_0^{(2)}(z - z^*), -\frac{T_n}{\Omega \beta_0^{(2)}} \right) \quad (4.193)$$

となる。このとき、斜線部分は

$$z - z^* > \frac{T_n}{\Omega \beta_0^{(2)}} \text{ のとき} \\ T_n - \frac{\Omega}{2} \beta_0^{(2)}(z - z^*) \leq t - \{T_\ell + \delta T_s + \Omega_s \beta_0^{(2)}(z - z^*)\} \leq \frac{\Omega}{2} \beta_0^{(2)}(z - z^*) \quad (4.194)$$

$$|z - z^*| < \frac{T_n}{\Omega \beta_0^{(2)}} \text{ のとき } \quad \text{なし} \quad (4.195)$$

$$z - z^* < -\frac{T_n}{\Omega \beta_0^{(2)}} \text{ のとき} \\ T_n + \frac{\Omega}{2} \beta_0^{(2)}(z - z^*) \leq t - \{T_\ell + \delta T_s + \Omega_s \beta_0^{(2)}(z - z^*)\} \leq -\frac{\Omega}{2} \beta_0^{(2)}(z - z^*) \quad (4.196)$$

と表される。

図 4.3 の斜線は、式 (4.175)-(4.178) の表す領域が重なる領域を示す。

図 4.3 中に示す 2 本の直線の交点は、式 (4.179)-(4.182)、(4.188)-(4.191) より、

(i) $z - z^* > 0$ 、かつ、点 a' が点 a よりも左にある、すなわち、 $T_\ell + \delta T_s + \Omega_s \beta_0^{(2)}(z - z^*) < 0$ のとき

$$c : D \text{ と } A' \text{ の交点 } (t, z - z^*) = \left(T_n - \frac{\Omega}{2(\Omega_s + \Omega)} \{T_n - (T_\ell + \delta T_s)\}, \frac{T_n - (T_\ell + \delta T_s)}{(\Omega_s + \Omega) \beta_0^{(2)}} \right) \quad (4.197)$$

$$d : D \text{ と } D' \text{ の交点 } (t, z - z^*) = \left(T_n + \frac{\Omega}{2\Omega_s} (T_\ell + \delta T_s), -\frac{T_\ell + \delta T_s}{\Omega_s \beta_0^{(2)}} \right) \quad (4.198)$$

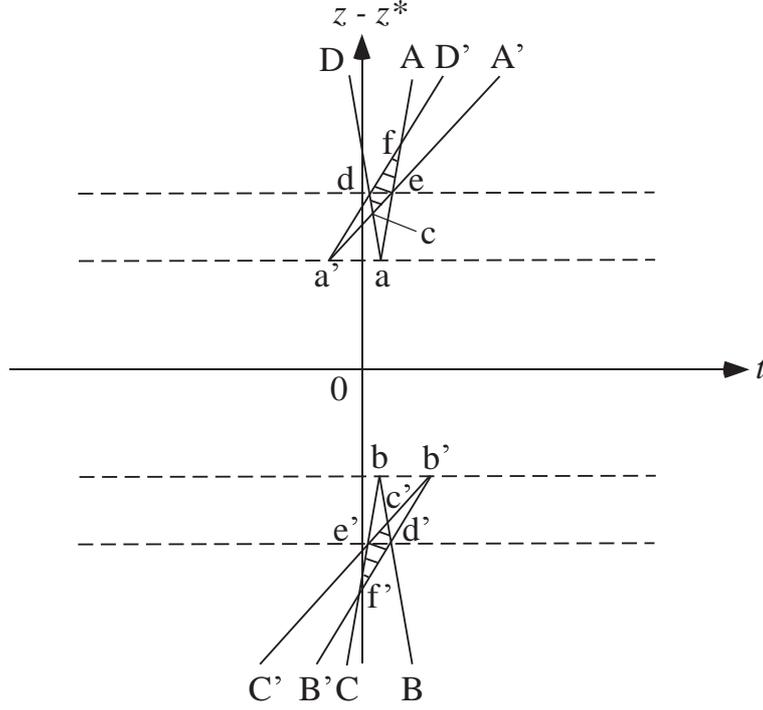


図 4.3: 式 (4.175)-(4.178) の表す領域が重なる領域

$$e : A \text{ と } A' \text{ の交点 } (t, z - z^*) = \left(-\frac{\Omega}{2\Omega_s}(T_\ell + \delta T_s), -\frac{T_\ell + \delta T_s}{\Omega_s \beta_0^{(2)}} \right) \quad (4.199)$$

$$f : A \text{ と } D' \text{ の交点 } (t, z - z^*) = \left(-\frac{\Omega}{2(\Omega_s - \Omega)}(T_n + T_\ell + \delta T_s), -\frac{T_n + T_\ell + \delta T_s}{(\Omega_s - \Omega)\beta_0^{(2)}} \right) \quad (4.200)$$

(ii) $z - z^* < 0$ 、かつ、点 b' が点 b よりも右にある、すなわち、 $T_\ell + \delta T_s + \Omega_s \beta_0^{(2)}(z - z^*) > 0$ のとき

$$c' : B \text{ と } C' \text{ の交点 } (t, z - z^*) = \left(\frac{\Omega}{2(\Omega_s + \Omega)}(T_n + T_\ell + \delta T_s), -\frac{T_n + T_\ell + \delta T_s}{(\Omega_s + \Omega)\beta_0^{(2)}} \right) \quad (4.201)$$

$$d' : B \text{ と } B' \text{ の交点 } (t, z - z^*) = \left(\frac{\Omega}{2\Omega_s}(T_\ell + \delta T_s), -\frac{T_\ell + \delta T_s}{\Omega_s \beta_0^{(2)}} \right) \quad (4.202)$$

$$e' : C \text{ と } C' \text{ の交点 } (t, z - z^*) = \left(T_n - \frac{\Omega}{2\Omega_s}(T_\ell + \delta T_s), -\frac{T_\ell + \delta T_s}{\Omega_s \beta_0^{(2)}} \right) \quad (4.203)$$

$$f' : C \text{ と } B' \text{ の交点 } (t, z - z^*) = \left(T_n + \frac{\Omega}{2(\Omega_s - \Omega)} \{T_n - (T_\ell + \delta T_s)\}, -\frac{T_n + T_\ell + \delta T_s}{(\Omega_s - \Omega)\beta_0^{(2)}} \right) \quad (4.204)$$

となる。このとき、斜線部分の t 方向の幅、すなわち、4つのパルスが重なっている時間幅 Δt は

(i) $z > z^*$ 、かつ、 $T_\ell + \delta T_s + \Omega_s \beta_0^{(2)}(z - z^*) < 0$ のとき

$$(i-1) \quad 0 < z - z^* < -\frac{T_\ell + \delta T_s}{(\Omega_s + \Omega)\beta_0^{(2)}} \text{ のとき} \quad \text{なし} \quad (4.205)$$

$$(i-2) \quad -\frac{T_\ell + \delta T_s}{(\Omega_s + \Omega)\beta_0^{(2)}} < z - z^* < -\frac{T_\ell + \delta T_s}{\Omega_s \beta_0^{(2)}} \text{ のとき} \\ \Delta t = \Omega \beta_0^{(2)}(z - z^*) - T_n + T_\ell + \delta T_s + \Omega_s \beta_0^{(2)}(z - z^*) \quad (4.206)$$

$$(i-3) \quad -\frac{T_\ell + \delta T_s}{\Omega_s \beta_0^{(2)}} < z - z^* < -\frac{T_n + T_\ell + \delta T_s}{(\Omega_s - \Omega)\beta_0^{(2)}} \text{ のとき} \\ \Delta t = \Omega \beta_0^{(2)}(z - z^*) - T_n - \{T_\ell + \delta T_s + \Omega_s \beta_0^{(2)}(z - z^*)\} \quad (4.207)$$

$$(i-4) \quad -\frac{T_n + T_\ell + \delta T_s}{(\Omega_s - \Omega)\beta_0^{(2)}} < z - z^* < L - z^* \text{ のとき} \quad \text{なし} \quad (4.208)$$

(ii) $z < z^*$ 、かつ、 $T_\ell + \delta T_s + \Omega_s \beta_0^{(2)}(z - z^*) > 0$ のとき

$$(ii-1) \quad -\frac{T_n + T_\ell + \delta T_s}{(\Omega_s + \Omega)\beta_0^{(2)}} < z - z^* < 0 \text{ のとき} \quad \text{なし} \quad (4.209)$$

$$(ii-2) \quad -\frac{T_\ell + \delta T_s}{\Omega_s \beta_0^{(2)}} < z - z^* < -\frac{T_n + T_\ell + \delta T_s}{(\Omega_s + \Omega)\beta_0^{(2)}} \text{ のとき} \\ \Delta t = -\Omega \beta_0^{(2)}(z - z^*) - T_n - \{T_\ell + \delta T_s + \Omega_s \beta_0^{(2)}(z - z^*)\} \quad (4.210)$$

$$(ii-3) \quad \frac{T_n - (T_\ell + \delta T_s)}{(\Omega_s - \Omega)\beta_0^{(2)}} < z - z^* < -\frac{T_\ell + \delta T_s}{\Omega_s \beta_0^{(2)}} \text{ のとき} \\ \Delta t = -\Omega \beta_0^{(2)}(z - z^*) - T_n + T_\ell + \delta T_s + \Omega_s \beta_0^{(2)}(z - z^*) \quad (4.211)$$

$$(ii-4) \quad -z^* < z - z^* < \frac{T_n - (T_\ell + \delta T_s)}{(\Omega_s - \Omega)\beta_0^{(2)}} \text{ のとき} \quad \text{なし} \quad (4.212)$$

と表される。なお、式(4.207)、(4.211)の条件を満たす z は存在せず、以下では考えない。式(4.206)、(4.210)で表される時間幅 Δt を、式(4.160)を考慮して、 $\Delta \hat{\Omega} = \Delta t / \{\beta_0^{(2)}|z - z^*|\}$ に変換すると、

(i-2) $z > z^*$ 、かつ、 $\frac{\Omega(T_\ell + \delta T_s)}{\Omega_s + \Omega} < T_\ell + \delta T_s + \Omega_s \beta_0^{(2)}(z - z^*) < 0$ のとき

$$\begin{aligned} \Delta \hat{\Omega} &= \Omega - \frac{T_n - \{T_\ell + \delta T_s + \Omega_s \beta_0^{(2)}(z - z^*)\}}{\beta_0^{(2)}(z - z^*)} \\ &= \Omega - \frac{T_n + |T_\ell + \delta T_s + \Omega_s \beta_0^{(2)}(z - z^*)|}{\beta_0^{(2)}(z - z^*)} \end{aligned} \quad (4.213)$$

(ii-2) $z < z^*$ 、かつ、 $0 < T_\ell + \delta T_s + \Omega_s \beta_0^{(2)}(z - z^*) < -\frac{\Omega_s T_n - \Omega(T_\ell + \delta T_s)}{\Omega_s + \Omega}$ のとき

$$\begin{aligned}\Delta\hat{\Omega} &= \Omega - \frac{T_n + T_\ell + \delta T_s + \Omega_s \beta_0^{(2)}(z - z^*)}{\beta_0^{(2)}(z - z^*)} \\ &= \Omega - \frac{T_n + |T_\ell + \delta T_s + \Omega_s \beta_0^{(2)}(z - z^*)|}{\beta_0^{(2)}(z - z^*)}\end{aligned}\quad (4.214)$$

となる。 $T_n > 0$ 、 $\beta_0^{(2)} > 0$ 、 $\Omega_s > 0$ 以外の場合についても同様に考えると、 $\Delta\hat{\Omega}$ は、

$$\Delta\hat{\Omega} = \Omega - \frac{|T_n| + |T_\ell + \delta T_s + \Omega_s \beta_0^{(2)}(z - z^*)|}{|\beta_0^{(2)}(z - z^*)|}\quad (4.215)$$

となる。式(4.215)より、(4.165)は

$$\begin{aligned}I_{\ell, \ell+n, n}(z) &= \frac{\exp(i\Omega_s T_n)}{|\beta_0^{(2)}(z - z^*)|\Omega^2} \exp\left[i\frac{(T_\ell + \delta T_s)T_n}{\beta_0^{(2)}(z - z^*)}\right] \\ &\quad \times \Phi\left[\Omega - \frac{|T_n| + |T_\ell + \delta T_s + \Omega_s \beta_0^{(2)}(z - z^*)|}{|\beta_0^{(2)}(z - z^*)|}\right] \\ &= \frac{\exp(i\Omega_s T_n)}{|\beta_0^{(2)}(z - z^*)|\Omega} \exp\left[i\frac{(T_\ell + \delta T_s)T_n}{\beta_0^{(2)}(z - z^*)}\right] \\ &\quad \times \Phi\left[1 - \frac{|T_n| + |T_\ell + \delta T_s + \Omega_s \beta_0^{(2)}(z - z^*)|}{\Omega|\beta_0^{(2)}(z - z^*)|}\right]\end{aligned}\quad (4.216)$$

となる。ここで、

$$\Phi(x) = \frac{x + |x|}{2} = \begin{cases} x & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}\quad (4.217)$$

である。次に、分散距離 z_d を

$$z_d = \frac{T^2}{2\pi\beta_0^{(2)}}\quad (4.218)$$

で定義し、

$$s = \frac{\Omega_s}{\Omega} = \frac{\Omega_s T}{2\pi}, \quad k = \frac{T_k}{T}, \quad \delta_s = \frac{\delta T_s}{T} \quad \left(\text{ただし、}|\delta_s| \leq \frac{1}{2}\right)\quad (4.219)$$

の関係を用いて、式(4.216)を書き換えると、

$$I_{\ell, \ell+n, n}(z) = \frac{\exp(i2\pi sn)}{T \left|\frac{z - z^*}{z_d}\right|} \exp\left(i2\pi n \frac{\ell + \delta_s}{z_d} \frac{z - z^*}{z_d}\right) \Phi\left[1 - \frac{|n| + \left|\ell + \delta_s + s \frac{z - z^*}{z_d}\right|}{\left|\frac{z - z^*}{z_d}\right|}\right]$$

$$= \frac{1}{T \left| \frac{z - z^*}{z_d} \right|} \exp \left(i2n\pi \frac{\ell + \delta_s + s \frac{z - z^*}{z_d}}{\frac{z - z^*}{z_d}} \right) \Phi \left[1 - \frac{|n| + \left| \ell + \delta_s + s \frac{z - z^*}{z_d} \right|}{\left| \frac{z - z^*}{z_d} \right|} \right] \quad (4.220)$$

となる。

式(4.147)において、 $m = \ell + n$ とおくと、

$$\begin{aligned} \langle |\delta a_{0,\text{XPM},s}^{(0)}|^2 \rangle &= 4\gamma^2 \frac{\mathcal{E}^2}{T^2} \langle |a^{(0)}|^2 \rangle \left[(\langle |a^{(s)}|^2 \rangle)^2 \sum_{\ell} \sum_n |C_{\ell,\ell+n,n}|^2 \right. \\ &\quad \left. + \{ \langle |a^{(s)}|^4 \rangle - (\langle |a^{(s)}|^2 \rangle)^2 \} \sum_{\ell} |C_{\ell,\ell,0}|^2 \right] \end{aligned} \quad (4.221)$$

となる。また、式(4.220)を(4.139)に代入し、 $z' = z - z^*$ に変数変換すると、

$$\begin{aligned} C_{\ell,\ell+n,n} &= T \int_0^L a_0^2(z) I_{\ell,\ell+n,n}(z) dz \\ &= z_d \exp(i2\pi sn) S_{\ell,n}(L) \end{aligned} \quad (4.222)$$

となる。ここで、

$$S_{\ell,n}(L) = \int_{-z^*}^{L-z^*} \frac{a_0^2(z' + z^*)}{\frac{z_d}{\left| \frac{z'}{z_d} \right|}} \exp \left(i2\pi n \frac{\ell + \delta_s}{\frac{z'}{z_d}} \right) \Phi \left[1 - \frac{|n| + \left| \ell + \delta_s + s \frac{z'}{z_d} \right|}{\left| \frac{z'}{z_d} \right|} \right] dz' \quad (4.223)$$

である。式(4.222)を(4.221)に代入し、

$$\langle |\delta a_{0,\text{XPM},s}^{(0)}|^2 \rangle = 4\gamma^2 \frac{\mathcal{E}^2}{T^2} z_d^2 [X_1(s) + X_0(s)] \quad (4.224)$$

を得る。ここで、 X_0 と X_1 はそれぞれ A_0^2 と A_1^2 の分散に $1/z_d^2$ を乗じた値であり、

$$X_0(s) = \langle |a^{(0)}|^2 \rangle \{ \langle |a^{(s)}|^4 \rangle - (\langle |a^{(s)}|^2 \rangle)^2 \} \sum_{\ell} |S_{\ell,0}|^2 \quad (4.225)$$

$$X_1(s) = \langle |a^{(0)}|^2 \rangle (\langle |a^{(s)}|^2 \rangle)^2 \sum_{\ell} \sum_n |S_{\ell,n}|^2 \quad (4.226)$$

である。式(4.223)において、 z_d を $-z_d$ 、 $\ell + \delta_s$ を $-(\ell + \delta_s)$ にそれぞれ変更しても、 $S_{\ell,n}$ の符号が変わるのみで、 $|S_{\ell,n}|^2$ の値は変わらない。よって、 z_d の符号は式(4.225)、(4.226)で与えられる X_0 および X_1 の値には影響しない。そこで、以下では、 $z_d > 0$ ($\beta_0^{(2)} > 0$)とし、式(4.223)の積分を、 $-z^* \leq z' \leq 0$ の積分と、

$0 \leq z' \leq L - z^*$ の積分に分割する。このとき、

$$\begin{aligned}
S_{\ell,n}(L) &= \int_{-z^*}^0 \frac{a_0^2(z' + z^*)}{\frac{z_d}{\left|\frac{z'}{z_d}\right|}} \exp\left(i2\pi n \frac{\ell + \delta_s}{\frac{z'}{z_d}}\right) \Phi \left[1 - \frac{|n| + \left|\ell + \delta_s + s \frac{z'}{z_d}\right|}{\left|\frac{z'}{z_d}\right|} \right] dz' \\
&+ \int_0^{L-z^*} \frac{a_0^2(z' + z^*)}{\frac{z_d}{\left|\frac{z'}{z_d}\right|}} \exp\left(i2\pi n \frac{\ell + \delta_s}{\frac{z'}{z_d}}\right) \Phi \left[1 - \frac{|n| + \left|\ell + \delta_s + s \frac{z'}{z_d}\right|}{\left|\frac{z'}{z_d}\right|} \right] dz'
\end{aligned} \tag{4.227}$$

となり、さらに、上式の右辺第一項の積分において、 $\zeta' = -z'$ の変数変換を行うと、

$$\begin{aligned}
S_{\ell,n}(L) &= \int_0^{z^*} \frac{a_0^2(-\zeta' + z^*)}{\frac{z_d}{\left|\frac{\zeta'}{z_d}\right|}} \exp\left(-i2\pi n \frac{\ell + \delta_s}{\frac{\zeta'}{z_d}}\right) \Phi \left[1 - \frac{|n| + \left|\ell + \delta_s - s \frac{\zeta'}{z_d}\right|}{\left|\frac{\zeta'}{z_d}\right|} \right] d\zeta' \\
&+ \int_0^{L-z^*} \frac{a_0^2(z' + z^*)}{\frac{z_d}{\left|\frac{z'}{z_d}\right|}} \exp\left(i2\pi n \frac{\ell + \delta_s}{\frac{z'}{z_d}}\right) \Phi \left[1 - \frac{|n| + \left|\ell + \delta_s + s \frac{z'}{z_d}\right|}{\left|\frac{z'}{z_d}\right|} \right] dz'
\end{aligned} \tag{4.228}$$

となる。よって、式 (4.223) は

$$S_{\ell,n}(L) = S_{\ell,n}^{(-)}(z^*) + S_{\ell,n}^{(+)}(L - z^*) \tag{4.229}$$

と表すことができる。ここで、

$$\begin{aligned}
S_{\ell,n}^{(\pm)}(z) &= \int_0^z \frac{a_0^2(z^* \pm z')}{\frac{z_d}{\left|\frac{z'}{z_d}\right|}} \exp\left(\pm i2\pi n \frac{\ell + \delta_s}{\frac{z'}{z_d}}\right) \Phi \left[1 - \frac{|n| + \left|\ell + \delta_s \pm s \frac{z'}{z_d}\right|}{\left|\frac{z'}{z_d}\right|} \right] dz' \\
&= \int_0^z \frac{a_0^2(z^* \pm z')}{\frac{z_d}{\left|\frac{z'}{z_d}\right|}} \exp\left(\pm i2\pi n \frac{\ell + \delta_s}{\frac{z'}{z_d}}\right) \Phi \left[1 - \frac{|n| + \left|\pm(\ell + \delta_s) + s \frac{z'}{z_d}\right|}{\left|\frac{z'}{z_d}\right|} \right] dz'
\end{aligned} \tag{4.230}$$

である。 $z^* = L$ の場合には $S_{\ell,n}(L) = S_{\ell,n}^{(-)}(L)$ となり、伝送系全体の累積分散を前置分散補償のみで全て補償する場合に相当し、後置分散補償は不要である。一

方、 $z^* = 0$ の場合には $S_{\ell,n}(L) = S_{\ell,n}^{(+)}(L)$ となり、前置分散補償を行わず、伝送系全体の累積分散を後置分散補償のみで全て補償する場合に相当する。よって、式(4.229)のように $S_{\ell,n}$ を $S_{\ell,n}^{(-)}$ と $S_{\ell,n}^{(+)}$ に分割できるということは、伝送系全体を伝送路長が z^* で前置分散補償のみを行う系と、伝送路長が $L - z^*$ で後置分散補償のみを行う系に分割できることを意味する。また、このことは、分割された2つの系で、XPMによる影響を互いに独立として考えることができることを表す。以下では、 $s > 1$ とし、前置分散補償量を最適化することによっては、チャンネル間XPMによる影響を最小化できないことを示す。なお、チャンネル内XPMによる影響についてはその限りではない。 $S_{\ell,n}^{(+)}(L - z^*)$ において $\ell + \delta_s$ を $-(\ell + \delta_s)$ に、 $L - z^*$ を z^* に置き換えると、 $S_{\ell,n}^{(-)}(z^*)$ となる。まず、伝送路長が $L - z^*$ で後置分散補償のみを行う系での $S_{\ell,n}^{(+)}(L - z^*)$ について考える。このとき、 $0 \leq z' \leq L - z^*$ に対して、式(4.230)中の関数 Φ が非零となる z' は

$$|n| + \left| \ell + \delta_s + s \frac{z'}{z_d} \right| < \frac{z'}{z_d} \quad (4.231)$$

を解くことによって求めることができる。 $\ell + \delta_s + s \frac{z'}{z_d} > 0$ 、すなわち、 $z' > z_0$ の場合、式(4.231)より、

$$z' < -z_d \frac{|n| + \ell + \delta_s}{s - 1} \quad (4.232)$$

が得られ、 $\ell + \delta_s + s \frac{z'}{z_d} < 0$ 、すなわち、 $z' < z_0$ の場合には、

$$z' > z_d \frac{|n| - (\ell + \delta_s)}{s + 1} \quad (4.233)$$

が得られる。ここで、

$$z_0 = -z_d \frac{\ell + \delta_s}{s} \quad (4.234)$$

である。式(4.232)と(4.233)をまとめると、 Φ が非零となる z' は

$$z_1 < z' < z_2 \quad (4.235)$$

となる。ここで、

$$z_1 = z_d \frac{|n| - (\ell + \delta_s)}{s + 1} \quad (4.236)$$

$$z_2 = -z_d \frac{|n| + \ell + \delta_s}{s - 1} \quad (4.237)$$

である。また、式(4.235)が成り立つには、 $z_2 > z_1$ である必要があり、(4.236)および(4.237)より、この条件が満たされるのは、

$$-(\ell + \delta_s) > s|n| \quad (4.238)$$

の場合である。さらに、 $z_1 \geq L - z^*$ の場合には、 Φ は常に零となるので、 Φ が非零となる z' が存在するには、 $z_1 < L - z^*$ である必要がある。式 (4.236) より、この条件が満たされるのは、

$$-(\ell + \delta_s) < (s + 1) \frac{L - z^*}{z_d} - |n| \quad (4.239)$$

の場合である。よって、式 (4.238) と (4.239) の2つの条件を合わせて示すと、

$$s|n| < -(\ell + \delta_s) < (s + 1) \frac{L - z^*}{z_d} - |n| \quad (4.240)$$

となる。式 (4.240) より、

$$s|n| < (s + 1) \frac{L - z^*}{z_d} - |n| \quad (4.241)$$

が成り立つ。すなわち、

$$|n| < \frac{L - z^*}{z_d} \quad (4.242)$$

となり、式 (4.242) は、 Φ が非零となる z' が存在するための $|n|$ の上限を与える。

式 (4.228) 右辺第1項の積分は、第2項の積分において、 $\ell + \delta_s$ を $-(\ell + \delta_s)$ に置き換えることによって計算できる。第2項の被積分関数において、 $\ell + \delta_s < 0$ に対して非零となる z' が存在することは、第1項の被積分関数において、 $\ell + \delta_s > 0$ に対して非零となる z' が存在することに対応する。第0チャンネルのパルスに対して、累積分散が零となる距離 $z = z^*$ の前後の両方で相互作用を及ぼす干渉チャンネルのパルスは存在しない。よって、XPMによる干渉光電力は $\sum_{\ell} |C_{\ell, \ell+n, n}|^2$ に比例する。このことは、XPMによる干渉光電力が $z = z^*$ の前後では互いに独立であることを意味し、XPMによる干渉光電力は $z = z^*$ の前後それぞれの系における干渉光電力の和で表される。その結果、伝送路長 $L - z^*$ と z^* に分割された2つの系における干渉光電力の和によって伝送路全体にわたるXPMの影響を求めることができる。

理想的な分布的増幅が行われる伝送路を仮定して $a_0(z) = 1$ とする。式 (4.235) より、式 (4.230) 右辺の積分は

$$\begin{aligned} S_{\ell, n}^{(+)}(L - z^*) &= \int_{z_1}^{z'_2} \frac{1}{z'} \exp\left(i2\pi n z_d \frac{\ell + \delta_s}{z'}\right) \Phi \left[1 - \frac{z_d |n| + |z_d(\ell + \delta_s) + s z'|}{z'}\right] dz' \\ &= \int_{z_1}^{z'_2} \frac{z' - \{z_d |n| + |z_d(\ell + \delta_s) + s z'|\}}{(z')^2} \exp\left\{i \frac{2\pi n(\ell + \delta_s) z_d}{z'}\right\} dz' \\ &= \int_{z_1}^{z'_0} \frac{(1 - s)z' - z_d(|n| + \ell + \delta_s)}{(z')^2} \exp\left\{i \frac{2\pi n(\ell + \delta_s) z_d}{z'}\right\} dz' \\ &+ \int_{z'_0}^{z'_2} \frac{(1 + s)z' - z_d\{|n| - (\ell + \delta_s)\}}{(z')^2} \exp\left\{i \frac{2\pi n(\ell + \delta_s) z_d}{z'}\right\} dz' \end{aligned} \quad (4.243)$$

となる。ここで、

$$z'_2 = \min(z_2, L - z^*) \quad (4.244)$$

$$z'_0 = \min(z_0, z'_2) \quad (4.245)$$

である。まず、 $n \neq 0$ の場合について考える。

$$y' = i \frac{z'}{2\pi n(\ell + \delta_s)z_d}, \quad y'' = \frac{1}{y'} \quad (4.246)$$

とにおいて変数変換を行うと、式 (4.243) は

$$\begin{aligned} S_{\ell,n}^{(+)}(L - z^*) &= \int_{iz_1/\{2\pi n(\ell + \delta_s)z_d\}}^{iz'_0/\{2\pi n(\ell + \delta_s)z_d\}} \left\{ \frac{1-s}{y'} - i \frac{|n| + \ell + \delta_s}{2\pi n(\ell + \delta_s)(y')^2} \right\} \exp\left(-\frac{1}{y'}\right) dy' \\ &+ \int_{iz'_0/\{2\pi n(\ell + \delta_s)z_d\}}^{iz'_2/\{2\pi n(\ell + \delta_s)z_d\}} \left\{ \frac{1+s}{y'} - i \frac{|n| - (\ell + \delta_s)}{2\pi n(\ell + \delta_s)(y')^2} \right\} \exp\left(-\frac{1}{y'}\right) dy' \\ &= (1-s) \int_{iz_1/\{2\pi n(\ell + \delta_s)z_d\}}^{iz'_0/\{2\pi n(\ell + \delta_s)z_d\}} \frac{1}{y'} \exp\left(-\frac{1}{y'}\right) dy' \\ &+ i \frac{|n| + \ell + \delta_s}{2\pi n(\ell + \delta_s)} \int_{-i2\pi n(\ell + \delta_s)z_d/z_1}^{-i2\pi n(\ell + \delta_s)z_d/z'_0} \exp(-y'') dy'' \\ &+ (1+s) \int_{iz'_0/\{2\pi n(\ell + \delta_s)z_d\}}^{iz'_2/\{2\pi n(\ell + \delta_s)z_d\}} \frac{1}{y'} \exp\left(-\frac{1}{y'}\right) dy' \\ &+ i \frac{|n| - (\ell + \delta_s)}{2\pi n(\ell + \delta_s)} \int_{-2\pi n(\ell + \delta_s)z_d/z'_0}^{-i2\pi n(\ell + \delta_s)z_d/z'_2} \exp(-y'') dy'' \\ &= (1-s) \left\{ E_1\left(-i \frac{2\pi n[\ell + \delta_s]z_d}{z'_0}\right) - E_1\left(-i \frac{2\pi n[\ell + \delta_s]z_d}{z_1}\right) \right\} \\ &- i \frac{|n| + \ell + \delta_s}{2\pi n(\ell + \delta_s)} \left[\exp\left\{i \frac{2\pi n(\ell + \delta_s)z_d}{z'_0}\right\} - \exp\left\{i \frac{2\pi n(\ell + \delta_s)z_d}{z_1}\right\} \right] \\ &+ (1+s) \left\{ E_1\left(-i \frac{2\pi n[\ell + \delta_s]z_d}{z'_2}\right) - E_1\left(-i \frac{2\pi n[\ell + \delta_s]z_d}{z'_0}\right) \right\} \\ &- i \frac{|n| - (\ell + \delta_s)}{2\pi n(\ell + \delta_s)} \left[\exp\left\{i \frac{2\pi n(\ell + \delta_s)z_d}{z'_2}\right\} - \exp\left\{i \frac{2\pi n(\ell + \delta_s)z_d}{z'_0}\right\} \right] \end{aligned} \quad (4.247)$$

となる。ここで、 $E_1(x)$ は

$$E_1(x) = \int_x^\infty \frac{\exp(-y)}{y} dy = \int_0^{1/x} \frac{1}{y'} \exp\left(-\frac{1}{y'}\right) dy' \quad (4.248)$$

で定義される積分指数関数 [11] である。また、

$$F_{\ell,n}^{(\pm)}(z) = (1 \pm s) E_1\left(-i \frac{2\pi n(\ell + \delta_s)z_d}{z}\right) - i \frac{|n| \mp (\ell + \delta_s)}{2\pi n(\ell + \delta_s)} \exp\left\{i \frac{2\pi n(\ell + \delta_s)z_d}{z}\right\} \quad (4.249)$$

を定義すると、式 (4.247) は

$$S_{\ell,n}^{(+)}(L - z^*) = F_{\ell,n}^{(-)}(z'_0) - F_{\ell,n}^{(-)}(z_1) + F_{\ell,n}^{(+)}(z'_2) - F_{\ell,n}^{(+)}(z'_0) \quad (4.250)$$

と表される。一方、 $n = 0$ の場合、式 (4.243) は

$$\begin{aligned} S_{\ell,0}^{(+)}(L - z^*) &= \int_{z_1}^{z'_0} \left\{ \frac{1-s}{z'} - \frac{(\ell + \delta_s)z_d}{(z')^2} \right\} dz' + \int_{z'_0}^{z'_2} \left\{ \frac{1+s}{z'} + \frac{(\ell + \delta_s)z_d}{(z')^2} \right\} dz' \\ &= \left[(1-s) \log(z') + \frac{(\ell + \delta_s)z_d}{z'} \right]_{z_1}^{z'_0} + \left[(1+s) \log(z') - \frac{(\ell + \delta_s)z_d}{z'} \right]_{z'_0}^{z'_2} \\ &= (1-s) \{ \log(z'_0) - \log(z_1) \} + (\ell + \delta_s)z_d \left(\frac{1}{z'_0} - \frac{1}{z_1} \right) \\ &\quad + (1+s) \{ \log(z'_2) - \log(z'_0) \} - (\ell + \delta_s)z_d \left(\frac{1}{z'_2} - \frac{1}{z'_0} \right) \end{aligned} \quad (4.251)$$

となる。また、

$$F_{\ell,0}^{(\pm)}(z) = (1 \pm s) \log \left(\frac{z}{z_d} \right) \mp \frac{(\ell + \delta_s)z_d}{z} \quad (4.252)$$

を定義すると、式 (4.251) は

$$S_{\ell,0}^{(+)}(L - z^*) = F_{\ell,0}^{(-)}(z'_0) - F_{\ell,0}^{(-)}(z_1) + F_{\ell,0}^{(+)}(z'_2) - F_{\ell,0}^{(+)}(z'_0) \quad (4.253)$$

と表される。

以上に示した式 (4.221)、(4.222)、(4.229)、(4.247)、(4.251) を用いて、XPM による干渉光電力を求めることができる。干渉チャネルとのタイミングずれ δ_s ($|\delta_s| < 1/2$) を変えて、 $L/z_d \gg 1$ に対して数値計算を行った結果、式 (4.221) の値はほとんど δ_s の値に依らないことが分かった。よって、以下では $\delta_s = 0$ ($\delta T_s = 0$) とおくことにする。

4.11 相互位相変調による干渉光電力の近似

位相と振幅が変調されている場合、式 (4.221) のうちで支配的な項のみを残すと、

$$\langle |\delta a_{0,\text{XPM},s}^{(0)}|^2 \rangle \simeq 4\gamma^2 \frac{\mathcal{E}^2}{T^2} \langle |a^{(0)}|^2 \rangle \{ \langle |a^{(s)}|^4 \rangle - (\langle |a^{(s)}|^2 \rangle)^2 \} \sum_{\ell} |C_{\ell,\ell,0}|^2 \quad (4.254)$$

となる。以下では、 $\beta_0^{(2)} > 0$ 、 $\Omega_s \gg \Omega (> 0)$ とし、 $z^* = 0$ の場合について考える。このとき、式 (4.170) を (4.139) に代入することにより、 $C_{\ell,\ell,0}$ は次式で与えられる。

$$C_{\ell,\ell,0} = T \int_0^L \frac{a_0^2(z)}{|\beta_0^{(2)} z|} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left| \hat{u}_0 \left(\hat{\Omega} - \frac{T_{\ell}}{\beta_0^{(2)} z} - \Omega_s \right) \right|^2 |\hat{u}_0(\hat{\Omega})|^2 d\hat{\Omega} \right\} dz \quad (4.255)$$

上式において、 $\Omega_s \gg \Omega$ の場合、 $\frac{T_\ell}{\beta_0^{(2)}z} + \Omega_s = 0$ を満足する z 付近でのみ $\hat{\Omega}$ についての積分は値を持つ。すなわち、 z についての積分は $z_\ell = -T_\ell/\{\beta_0^{(2)}\Omega_s\}$ 、(ただし、 $T_\ell < 0$) 付近でのみ値を持つので、

$$C_{\ell,\ell,0} \simeq a_0^2(z_\ell)\mathcal{A} \quad (4.256)$$

となる。ここで、

$$\mathcal{A} = T \int_0^L \frac{1}{|\beta_0^{(2)}z|} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left| \hat{u}_0 \left(\hat{\Omega} - \frac{T_\ell}{\beta_0^{(2)}z} - \Omega_s \right) \right|^2 |\hat{u}_0(\hat{\Omega})|^2 d\hat{\Omega} \right\} dz \quad (4.257)$$

である。

$$w = \frac{T_\ell}{\beta_0^{(2)}z} + \Omega_s \quad (4.258)$$

すなわち、

$$z = -\frac{T_\ell}{(\Omega_s - w)\beta_0^{(2)}} \quad (4.259)$$

とにおいて変数変換し、 $\Omega_s \gg \Omega$ であることに注意して積分を実行すると、

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= T \int_{-\infty}^{T_\ell/(\beta_0^{(2)}L)+\Omega_s} \frac{1}{|\beta_0^{(2)}(\Omega_s - w)|} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{u}_0(\hat{\Omega} - w)|^2 |\hat{u}_0(\hat{\Omega})|^2 d\hat{\Omega} \right\} dw \\ &\simeq \frac{T}{|\beta_0^{(2)}\Omega_s|} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{u}_0(\hat{\Omega} - w)|^2 |\hat{u}_0(\hat{\Omega})|^2 d\hat{\Omega} \right\} dw \\ &\simeq \frac{T}{|\beta_0^{(2)}\Omega_s|} \int_{\infty}^{-\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{u}_0(\hat{\Omega}')|^2 |\hat{u}_0(\hat{\Omega})|^2 d\hat{\Omega} \right\} (-d\hat{\Omega}') \\ &\simeq \frac{T}{|\beta_0^{(2)}\Omega_s|} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{u}_0(\hat{\Omega}')|^2 d\hat{\Omega}' \right\} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{u}_0(\hat{\Omega})|^2 d\hat{\Omega} \right\} \\ &= \frac{T}{|\beta_0^{(2)}\Omega_s|} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{u}_0(\hat{\Omega})|^2 d\hat{\Omega} \right\}^2 \end{aligned} \quad (4.260)$$

となる。なお、 w についての積分の下限は、 $T_\ell < 0$ であることから、 $-\infty$ とした。また、 $\hat{\Omega}' = \hat{\Omega} - w$ なる変数変換を用いた。

よって、式 (4.256) は

$$C_{\ell,\ell,0} \simeq T \frac{a_0^2(z_\ell)}{|\beta_0^{(2)}\Omega_s|} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{u}_0(\hat{\Omega})|^2 d\hat{\Omega} \right\}^2 \quad (4.261)$$

となる。式 (4.27) より

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{u}_0(\hat{\Omega})|^2 d\hat{\Omega} = 1 \quad (4.262)$$

であるので、式(4.261)は

$$C_{\ell,\ell,0} \simeq T \frac{a_0^2(z_\ell)}{|\beta_0^{(2)}\Omega_s|} \quad (4.263)$$

となる。式(4.254)において、 ℓ についての和を積分で置き換え、(4.263)を代入すると、

$$\begin{aligned} \sum_{\ell} |C_{\ell,\ell,0}|^2 &\simeq \int |C_{\ell,\ell,0}|^2 d\left(-\frac{T_\ell}{T}\right) = \frac{1}{T} \int |C_{\ell,\ell,0}|^2 d(\beta_0^{(2)}\Omega_s z_\ell) \\ &= \frac{\beta_0^{(2)}\Omega_s}{T} \int_0^L T^2 \frac{a_0^4(z_\ell)}{|\beta_0^{(2)}\Omega_s|^2} dz_\ell = \frac{T}{|\beta_0^{(2)}\Omega_s|} \int_0^L a_0^4(z) dz \quad (4.264) \end{aligned}$$

となる。よって、式(4.254)は

$$\langle |\delta a_{0,\text{XPM},s}^{(0)}|^2 \rangle \simeq 4\gamma^2 \frac{\mathcal{E}^2}{T^2} \{ \langle |a^{(s)}|^4 \rangle - (\langle |a^{(s)}|^2 \rangle)^2 \} \langle |a^{(0)}|^2 \rangle \frac{T}{|\beta_0^{(2)}\Omega_s|} \int_0^L a_0^4(z) dz \quad (4.265)$$

となる。式(4.265)はXPMによる干渉光電力がシンボル周期 T に比例することを表す。また、パルス波形とパルス幅には依存しないことを表している。 $z^* > 0$ の場合にも式(4.265)は有効である。なぜなら、あるパルスが、 $0 < z < z^*$ で $T_\ell > 0$ のパルスと相互作用し、 $z^* < z < L$ で $T_\ell < 0$ のパルスと相互作用するからである。前述したように、 $z = z^*$ の前後でのXPMの影響は独立であり、 $z = z^*$ の前後での干渉光電力を加え合わせるにより、伝送路全長にわたる干渉光電力を求めることができる。また、このことは前置分散補償によってXPMの影響を低減できないことを示している。伝送路が無損失の場合、 $a_0(z) = 1$ となるので、式(4.265)は

$$\langle |\delta a_{0,\text{XPM},s}^{(0)}|^2 \rangle \simeq 4\gamma^2 \frac{\mathcal{E}^2}{T^2} \{ \langle |a^{(s)}|^4 \rangle - (\langle |a^{(s)}|^2 \rangle)^2 \} \langle |a^{(0)}|^2 \rangle \frac{TL}{|\beta_0^{(2)}\Omega_s|} \quad (4.266)$$

となり、XPMによる干渉光電力は伝送路長 L に比例して増加する。

式(4.265)の適用限界は、伝送路中での分散補償を行わない場合の sinc 形パルスについて、式(4.222)と(4.229)を使って(4.221)の全ての項を足し合わせて得られた厳密な結果と比較することによって調べることができる。sinc 形パルスの場合には、 $\langle |\delta a_{0,\text{XPM},s}^{(0)}|^2 \rangle$ は次式に示す $X_0(s)$ に比例する。 $X_0(s)$ は式(4.225)に(4.222)、(4.264)を代入し、さらに、(4.173)、(4.218)、(4.219)を用いることによって、

$$\begin{aligned} X_0(s) &= \langle |a^{(0)}|^2 \rangle \{ \langle |a^{(s)}|^4 \rangle - (\langle |a^{(s)}|^2 \rangle)^2 \} \sum_{\ell} \frac{|C_{\ell,\ell,0}|^2}{z_d^2} \\ &\simeq \langle |a^{(0)}|^2 \rangle \{ \langle |a^{(s)}|^4 \rangle - (\langle |a^{(s)}|^2 \rangle)^2 \} \frac{T}{|\beta_0^{(2)}\Omega_s| z_d^2} \int_0^L a_0^4(z) dz \\ &= \langle |a^{(0)}|^2 \rangle \{ \langle |a^{(s)}|^4 \rangle - (\langle |a^{(s)}|^2 \rangle)^2 \} \frac{1}{|s|z_d} \int_0^L a_0^4(z) dz \quad (4.267) \end{aligned}$$

となる。一方、伝送路が無損失の場合には、数値解析結果より、 $X_1(s)$ は

$$X_1(s) \simeq \langle |a^{(0)}|^2 \rangle (\langle |a^{(s)}|^2 \rangle)^2 \frac{L}{15|s^2|} \quad (4.268)$$

と近似的に表される。

4.12 非線形シャノン限界

白色ガウス雑音の存在下において、単位周波数帯域当たりの通信路容量 C [bit/s] で定義される周波数利用効率 C/W [bit/s/Hz] は、信号対雑音電力比 (SN 比) S/N を用いて

$$\frac{C}{W} = \log_2 \left(1 + \frac{S}{N} \right) \quad (4.269)$$

で与えられる [12]。ここで、 W [Hz] は周波数帯域幅である。

コンステレーション図上での光増幅器雑音および非線形干渉雑音による信号点のずれが信号点のまわりに点対称に分布するとし、それらの雑音の和を白色ガウス雑音とみなすと、式 (4.269) における SN 比の逆数は、式 (4.114)、(4.117) より、

$$\begin{aligned} \left(\frac{S}{N} \right)^{-1} &= \frac{\langle |\Delta a_0^{(0)}|^2 \rangle}{\langle |a^{(0)}|^2 \rangle} \\ &= \frac{\langle |\Delta a_{0,NS}^{(0)}|^2 \rangle}{\langle |a^{(0)}|^2 \rangle} + \sum_{s(\neq 0)} \frac{\langle |\Delta a_{0,XPM,s}^{(0)}|^2 \rangle}{\langle |a^{(0)}|^2 \rangle} \end{aligned} \quad (4.270)$$

と表される。まず、光増幅器雑音の項について考える。式 (4.129) より、

$$\frac{\langle |\Delta a_{0,NS}^{(0)}|^2 \rangle}{\langle |a^{(0)}|^2 \rangle} = \frac{\hbar \omega_0 n_{sp} \alpha L_{eff} \exp(2\alpha L)}{\langle |a^{(0)}|^2 \rangle \mathcal{E}} \quad (4.271)$$

となる。第 s チャンネルの平均電力を

$$P_s = \langle |a^{(s)}|^2 \rangle \frac{\mathcal{E}}{T} \quad (4.272)$$

と表すと、式 (4.271) は

$$\frac{\langle |\Delta a_{0,NS}^{(0)}|^2 \rangle}{\langle |a^{(0)}|^2 \rangle} = \frac{\hbar \omega_0 n_{sp} \alpha L_{eff} \exp(2\alpha L)}{P_0 T} \quad (4.273)$$

と表される。一方、XPM による非線形干渉雑音の項については、伝送路が無損失の場合、式 (4.266) より

$$\sum_{s(\neq 0)} \frac{\langle |\Delta a_{0,XPM,s}^{(0)}|^2 \rangle}{\langle |a^{(0)}|^2 \rangle} = 4\gamma^2 \frac{\mathcal{E}^2}{T^2} \frac{TL}{|\beta_0^{(2)}|} \sum_{s(\neq 0)} \frac{\langle |a^{(s)}|^4 \rangle - (\langle |a^{(s)}|^2 \rangle)^2}{|\Omega_s|} \quad (4.274)$$

となる。

$$\kappa_s = \frac{\langle |a^{(s)}|^4 \rangle - (\langle |a^{(s)}|^2 \rangle)^2}{(\langle |a^{(s)}|^2 \rangle)^2} = \frac{\langle |a^{(s)}|^4 \rangle}{(\langle |a^{(s)}|^2 \rangle)^2} - 1 \quad (4.275)$$

を定義し、式 (4.272) と (4.275) を (4.274) に代入すると、

$$\begin{aligned} \sum_{s(\neq 0)} \frac{\langle |\Delta a_{0,\text{XPM},s}^{(0)}|^2 \rangle}{\langle |a^{(0)}|^2 \rangle} &= 4\gamma^2 \frac{\mathcal{E}^2}{T^2} \frac{TL}{|\beta_0^{(2)}|} \sum_{s(\neq 0)} \frac{\kappa_s (\langle |a^{(s)}|^2 \rangle)^2}{|\Omega_s|} \\ &= 4 \frac{\gamma^2 TL}{|\beta_0^{(2)}|} \sum_{s(\neq 0)} \frac{\kappa_s P_s^2}{|\Omega_s|} \end{aligned} \quad (4.276)$$

となる。チャンネル間隔の逆数の重みをもつ干渉チャンネルの実効電力の総和を

$$\mathcal{S}_P = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{s(\neq 0)} \frac{\kappa_s P_s^2}{|\Omega_s|}} = \sqrt{\frac{1}{\Omega T} \sum_{s(\neq 0)} \frac{\kappa_s P_s^2}{|s|}} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \sum_{s(\neq 0)} \frac{\kappa_s P_s^2}{|s|}} \quad (4.277)$$

とおくと、式 (4.276) は

$$\sum_{s(\neq 0)} \frac{\langle |\Delta a_{0,\text{XPM},s}^{(0)}|^2 \rangle}{\langle |a^{(0)}|^2 \rangle} = 4 \frac{\gamma^2 T^2 \mathcal{S}_P^2 L}{|\beta_0^{(2)}|} \quad (4.278)$$

と表される。式 (4.273) および (4.278) より、(4.270) は

$$\left(\frac{S}{N}\right)^{-1} = \frac{\hbar\omega_0 n_{\text{sp}} \alpha L_{\text{eff}} \exp(2\alpha L)}{P_0 T} + 4 \frac{\gamma^2 T^2 \mathcal{S}_P^2 L}{|\beta_0^{(2)}|} \quad (4.279)$$

となる。

式 (4.275) で定義される κ_s について考えてみよう。まず、コンステレーション図上で、信号点が原点を中心とする点対称な2次元ガウス分布で与えられる場合について考える。このとき、直交軸を u および v とすると、平均が0、分散が σ^2 の独立な2つのガウス分布の積で確率密度関数 $p(u, v)$ が与えられ、

$$p(u, v) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{u^2 + v^2}{2\sigma^2}\right) \quad (4.280)$$

となる。 $u = r \cos \phi$, $v = r \sin \phi$ において、上式を極座標表示すると、

$$p(r, \phi) = \frac{r}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) \quad (4.281)$$

となる。このとき、

$$\begin{aligned} \langle |a^{(s)}|^n \rangle &= \int_0^{2\pi} \int_0^\infty r^n p(r, \phi) dr d\phi \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty r^{n+1} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) dr \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \int_0^\infty r^{n+1} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) dr \end{aligned} \quad (4.282)$$

となり、さらに、 $R = r/(\sqrt{2}\sigma)$ において変数変換すると、 n が偶数のとき

$$\begin{aligned}\langle |a^{(s)}|^n \rangle &= 2^{1+n/2} \sigma^n \int_0^\infty R^{n+1} \exp(-R^2) dR \\ &= 2^{1+n/2} \sigma^n \times \frac{1}{2} \left(\frac{n}{2}\right)! = 2^{n/2} \left(\frac{n}{2}\right)! \sigma^n\end{aligned}\quad (4.283)$$

となる。よって、

$$\langle |a^{(s)}|^2 \rangle = 2 \left(\frac{2}{2}\right)! \sigma^2 = 2\sigma^2 \quad (4.284)$$

$$\langle |a^{(s)}|^4 \rangle = 2^2 \left(\frac{4}{2}\right)! \sigma^4 = 8\sigma^4 \quad (4.285)$$

+

となる。これらを式 (4.275) に代入すると、

$$\kappa_s = \frac{8\sigma^4}{(2\sigma^2)^2} - 1 = 1 \quad (4.286)$$

となる。次に、コンステレーション図上で、原点を中心とする半径 $r = ka$, ($k = 1, 2, \dots, n$) の n 個の同心円上に、それぞれ等しい個数の信号点がある場合について考える。このとき、

$$\begin{aligned}\kappa_s &= \frac{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (ka)^4}{\left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (ka)^2 \right\}^2} - 1 = \frac{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k^4}{\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k^2 \right)^2} - 1 \\ &= \frac{\frac{1}{n} \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}}{\left\{ \frac{1}{n} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right\}^2} - 1 \\ &= \frac{6(3n^2+3n-1)}{5(n+1)(2n+1)} - 1 = \frac{(n-1)(8n+11)}{5(n+1)(2n+1)}\end{aligned}\quad (4.287)$$

となる。最後に、 4^m -QAM 方式 ($m = 1, 2, \dots$) の場合について考える。最小信号点間隔を $2a$ とし、 $M = 2^{m-1}$ とおくと、 $\langle |a^{(s)}|^2 \rangle$ は式 (3.25) の P_s と等しく、

$$\langle |a^{(s)}|^2 \rangle = \frac{2(2^{2m} - 1)}{3} a^2 \quad (4.288)$$

となる。一方、 $\langle |a^{(s)}|^4 \rangle$ は

$$\langle |a^{(s)}|^4 \rangle = \frac{1}{4^{m-1}} \sum_{k=1}^M \sum_{\ell=1}^M [\{(2k-1)a\}^2 + \{(2\ell-1)a\}^2]^2$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4a^4}{2^{2m-2}} \sum_{k=1}^M \sum_{\ell=1}^M (2\ell^2 - 2\ell + 2k^2 - 2k + 1)^2 \\
&= 2^{4-2m} a^4 \sum_{k=1}^M \sum_{\ell=1}^M \left\{ 4\ell^4 - 8\ell^3 + 8(k^2 - k + 1)\ell^2 - 4(2k^2 - 2k + 1)\ell \right. \\
&\quad \left. + 4k^4 - 8k^3 + 8k^2 - 4k + 1 \right\} \\
&= 2^{4-2m} a^4 \sum_{k=1}^M \left[4 \frac{M(M+1)(2M+1)(3M^2+3M-1)}{30} - 8 \left\{ \frac{M(M+1)}{2} \right\}^2 \right. \\
&\quad \left. + 8(k^2 - k + 1) \frac{M(M+1)(2M+1)}{6} - 4(2k^2 - 2k + 1) \frac{M(M+1)}{2} \right. \\
&\quad \left. + (4k^4 - 8k^3 + 8k^2 - 4k + 1)M \right] \\
&= 2^{4-2m} a^4 M \sum_{k=1}^M \left\{ 4k^4 - 8k^3 + \frac{8}{3}(M^2+2)k^2 - \frac{4}{3}(2M^2+1)k + \frac{4M^4+1}{5} \right\} \\
&= 2^{4-2m} a^4 M \left[4 \frac{M(M+1)(2M+1)(3M^2+3M-1)}{30} - 8 \left\{ \frac{M(M+1)}{2} \right\}^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{8}{3}(M^2+2) \frac{M(M+1)(2M+1)}{6} - \frac{4}{3}(2M^2+1) \frac{M(M+1)}{2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{4M^4+1}{5} M \right] \\
&= 2^{4-2m} a^4 \frac{M^2(2M+1)(2M-1)(28M^2-13)}{45} \\
&= 2^{4-2m} \frac{2^{2m-2}(2 \cdot 2^{m-1} + 1)(2 \cdot 2^{m-1} - 1)(28 \cdot 2^{2m-2} - 13)}{45} a^4 \\
&= \frac{4(2^m + 1)(2^m - 1)(7 \cdot 2^{2m} - 13)}{45} a^4 \tag{4.289}
\end{aligned}$$

となる。これらを式 (4.275) に代入すると、

$$\kappa_s = \frac{4(2^m + 1)(2^m - 1)(7 \cdot 2^{2m} - 13)}{45} a^4 - 1 = \frac{2^{2m+1} - 8}{5(2^{2m} - 1)} \left\{ \frac{2(2^{2m} - 1)}{3} a^2 \right\}^2 \tag{4.290}$$

となる。表 4.1 に n および 4^m -QAM 方式と κ_s との関係を示す。また、図 4.4 に n と κ_s との関係を示す。

次に、全てのチャンネルの電力は等しく、 $P_s = P$ とする。SN 比のチャンネル数に対する依存性は式 (4.277) に示す S_P による。 $s > 0$ のチャンネル数を $N^{(+)}$ とし、 $s < 0$ のチャンネル数を $N^{(-)}$ とすると、総チャンネルは $N_{\text{ch}} = N^{(+)} + N^{(-)} + 1$ となる。また、チャンネルの周波数間隔を W_{sp} とすると、 $\Omega = 2\pi W_{\text{sp}}$ となり、帯域幅は $W = N_{\text{ch}} W_{\text{sp}}$ と表される。全てのチャンネルの変調フォーマットを同一とすると、 κ_s

$n / 4^m$ -QAM 方式	κ_s (分数表示)	κ_s (小数表示)
1 / QPSK	0	0
16(4 ²)-QAM	$\frac{8}{25}$	0.32
2	$\frac{9}{25}$	0.36
64(4 ³)-QAM	$\frac{8}{21}$	0.3810
256(4 ⁴)-QAM	$\frac{168}{425}$	0.3953
1024(4 ⁵)-QAM	$\frac{136}{341}$	0.3988
4096(4 ⁶)-QAM	$\frac{2728}{6825}$	0.3997
($m = \infty$)-QAM	$\frac{2}{5}$	0.4
3	$\frac{1}{2}$	0.5
4	$\frac{43}{75}$	0.5733
16	$\frac{139}{187}$	0.7433
∞	$\frac{4}{5}$	0.8

表 4.1 n および 4^m -QAM 方式と κ_s との関係

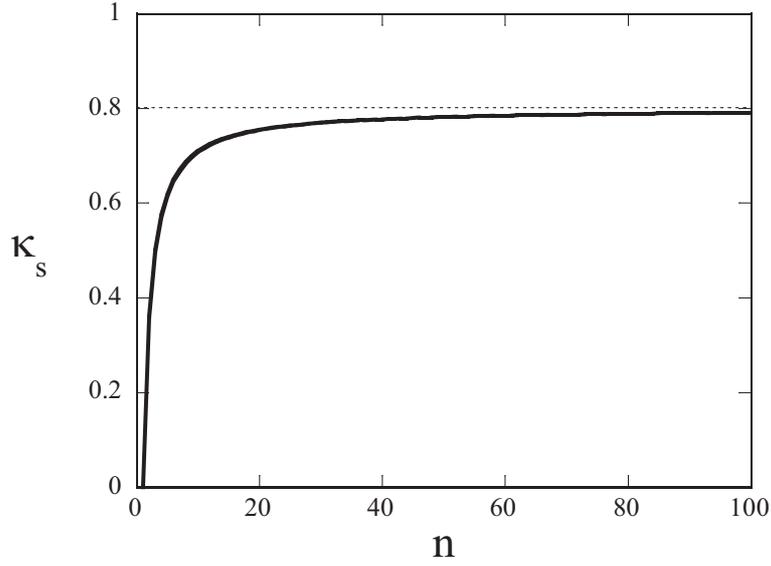


図 4.4: n と κ_s との関係

はチャンネル番号 s に依らず、 $\kappa_s = \kappa$ となる。このとき、 \mathcal{S}_P^2 は式 (4.277) より

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_P^2 &= \frac{P^2 \kappa}{2\pi} \sum_{s(\neq 0)} \frac{1}{|s|} \\ &= \frac{P^2 \kappa}{2\pi} \left[\sum_{s=1}^{N^{(+)}} \frac{1}{s} + \sum_{s=1}^{N^{(-)}} \frac{1}{s} \right] \end{aligned} \quad (4.291)$$

となる。ここで、

$$\mathcal{S}_B = \frac{\kappa}{2\pi} \left[\sum_{s=1}^{N^{(+)}} \frac{1}{s} + \sum_{s=1}^{N^{(-)}} \frac{1}{s} \right] \quad (4.292)$$

とおくと、式 (4.291) は

$$\mathcal{S}_P^2 = P^2 \mathcal{S}_B \quad (4.293)$$

と表される。よって、式 (4.292) に示すように、 \mathcal{S}_B は調和級数の有限項までの和で表される。チャンネル数が少ない場合には、それらは簡単に計算することができる。一方、チャンネル数 $N^{(\pm)}$ が多い場合には、オイラ一定数 $\gamma_E = 0.5772\dots$ が調和級数の和を用いて

$$\gamma_E = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{s=1}^n \frac{1}{s} - \ln(n) \right\} \quad (4.294)$$

と定義されることから、式 (4.292) を次式で近似することができる。

$$\mathcal{S}_B = \frac{\kappa}{2\pi} [\ln(N^{(+)}) + \ln(N^{(-)}) + 2\gamma_E] \quad (4.295)$$

チャンネル数が奇数である場合、 $N^{(+)} = N^{(-)} = (N_{\text{ch}} - 1)/2$ となるので、帯域の中心に位置するチャンネルである第 0 チャンネルに対しては、式 (4.295) は

$$\mathcal{S}_{B,\text{center}} = \frac{\kappa}{\pi} \left[\ln \left(\frac{N_{\text{ch}} - 1}{2} \right) + \gamma_E \right] \quad (4.296)$$

となる。次に、帯域の端に位置するチャンネルについて考える。 s が最小となるチャンネルについて考えると、 $N^{(+)} = N_{\text{ch}} - 1$ 、 $N^{(-)} = 0$ であるので、式 (4.294) より (4.292) は

$$\mathcal{S}_{B,\text{side}} = \frac{\kappa}{2\pi} [\ln(N_{\text{ch}} - 1) + \gamma_E] \quad (4.297)$$

となる。 \mathcal{S}_B の帯域幅 W に対する依存性は、 $N_{\text{ch}} = W/W_{\text{sp}}$ の置き換えによって求めることができる。帯域の中心に位置するチャンネルに対しては、

$$\mathcal{S}_{B,\text{center}} = \frac{\kappa}{\pi} \left[\ln \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{W}{W_{\text{sp}}} - 1 \right) \right\} + \gamma_E \right] \quad (4.298)$$

となり、帯域の端に位置するチャンネルに対しては

$$\mathcal{S}_{B,\text{side}} = \frac{\kappa}{2\pi} \left[\ln \left(\frac{W}{W_{\text{sp}}} - 1 \right) + \gamma_E \right] \quad (4.299)$$

となる。

最後に、周波数利用効率が最大となる信号電力 P_{max} を求めよう。式 (4.269) が最大となるのは、SN 比が最大となるときである。すなわち、式 (4.279) が最小となるときである。 $P_0 = P$ として、式 (4.279) に (4.293) を代入すると、

$$\left(\frac{S}{N} \right)^{-1} = \frac{\hbar\omega_0 n_{\text{sp}} \alpha L_{\text{eff}} \exp(2\alpha L)}{TP} + 4 \frac{\gamma^2 T^2 L \mathcal{S}_B P^2}{|\beta_0^{(2)}|} \quad (4.300)$$

となる。上式を P について微分し、その値を零とおくと、

$$\frac{\partial \{(S/N)^{-1}\}}{\partial P} = -\frac{\hbar\omega_0 n_{\text{sp}} \alpha L_{\text{eff}} \exp(2\alpha L)}{TP^2} + 8 \frac{\gamma^2 T^2 \mathcal{S}_B L P}{|\beta_0^{(2)}|} = 0 \quad (4.301)$$

となる。式 (4.301) を満たす P が P_{max} を与える。よって、

$$P_{\text{max}} = \frac{1}{2T} \left\{ \frac{\hbar\omega_0 n_{\text{sp}} \alpha L_{\text{eff}} \exp(2\alpha L) |\beta_0^{(2)}|}{\gamma^2 \mathcal{S}_B L} \right\}^{1/3} \quad (4.302)$$

となる。さらに、 $\alpha L \ll 1$ として、 $L_{\text{eff}} \exp(2\alpha L) \sim L$ とすると、上式は

$$P_{\text{max}} = \frac{1}{2T} \left(\frac{\hbar\omega_0 n_{\text{sp}} \alpha |\beta_0^{(2)}|}{\gamma^2 \mathcal{S}_B} \right)^{1/3} \quad (4.303)$$

となり、 P_{\max} は伝送路長 L に依存しない。式 (4.303) を (4.300) に代入すると、SN比の最大値は

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\max} = \frac{1}{3L} \left\{ \frac{(\hbar\omega_0 n_{\text{sp}} \alpha \gamma)^2 \mathcal{S}_B}{|\beta_0^{(2)}|} \right\}^{-1/3} \quad (4.304)$$

となる。さらに、式 (4.304) を (4.269) に代入すると、周波数利用効率の最大値は

$$\left(\frac{C}{W}\right)_{\max} = \log_2 \left(1 + \frac{1}{3L} \left\{ \frac{(\hbar\omega_0 n_{\text{sp}} \alpha \gamma)^2 \mathcal{S}_B}{|\beta_0^{(2)}|} \right\}^{-1/3} \right) \quad (4.305)$$

となる。式 (4.303) および (4.304) は、前章で求めた (3.127) および (3.130) と符合する結果であり、非線形シャノン限界を与える表式である。

参考文献

- [1] Partha P. Mitra and Jason B. Stark, “Nonlinear limits to the information capacity of optical fibre communications,” *Nature*, Vol.411, pp.1027-1030 (June 2001).
- [2] Jau Tang, “The Channel Capacity of a Multispan DWDM System Employing Dispersive Nonlinear Optical Fibers and an Ideal Coherent Optical Receiver,” *IEEE/OSA J. Lightwave Technol.*, Vol.20, No.7, pp.1095-1101 (July 2002).
- [3] Jau Tang, “A Comparison Study of the Shannon Channel Capacity of Various Nonlinear Optical Fibers,” *IEEE/OSA J. Lightwave Technol.*, Vol.24, No.5, pp.2070-2075 (May 2006).
- [4] Andrew D. Ellis, Jian Zhao, and David Cotter, “Approaching the Non-Linear Shannon Limit,” *IEEE/OSA J. Lightwave Technol.*, Vol.28, No.4, pp.423-433 (Feb. 2010).
- [5] Pontus Johannisson and Magnus Karlsson, “Perturbation Analysis of Nonlinear Propagation in a Strongly Dispersive Optical Communication System,” *IEEE/OSA J. Lightwave Technol.*, Vol.31, No.8, pp.1273-1282 (April 2013).
- [6] Antonio Mecozzi and René-Jean Essiambre, “Nonlinear Shannon Limit in Pseudolinear Coherent Systems,” *IEEE/OSA J. Lightwave Technol.*, Vol.30, No.12, pp.2011-2024 (June 2012).
- [7] René-Jean Essiambre, Gerhard Kramer, Peter J. Winzer, Gerard J. Foschini, and Bernhard Goebel, “Capacity Limits of Optical Fiber Networks,” *IEEE/OSA J. Lightwave Technol.*, Vol.28, No.4, pp.662-701 (Feb. 2010).

- [8] Antonio Mecozzi, Carl Balslev Clausen, and Mark Shtaif, “System Impact of Intra-Channel Nonlinear Effects in Highly Dispersed Optical Pulse Transmission,” *IEEE Photon. Technol. Lett.*, Vol.12, No.12, pp.1633-1635 (Dec. 2000).
- [9] A. Mecozzi, C. B. Clausen, M. Shtaif, Sang-Gyu Park, and A. H. Gnauck, “Cancellation of Timing and Amplitude Jitter in Symmetric Links Using Highly Dispersed Pulses,” *IEEE Photon. Technol. Lett.*, Vol.13, No.5, pp.445-447 (May 2001).
- [10] A. Mecozzi, “A Unified Theory of Intrachannel Nonlinearity in Pseudolinear Phase-Modulated Transmission,” *IEEE Photon. J.*, Vol.2, No.5, pp.728-735 (Oct. 2010).
- [11] Milton Abramowitz and Irene A. Stegun Ed., “Handbook of Mathematical Functions (9th edition),” Dover Publications (July 1972).
- [12] 齊藤洋一, デジタル無線通信の変復調, 電子情報通信学会 (1996).

第5章 非線形補償技術

ファイバの非線形性に起因する波形歪みの補償は、コヒーレント受信とデジタル信号処理を用いた次世代の長距離光伝送を実現する上で最も重要な技術課題である。ファイバ中における光パルスの伝搬の様子を記述する NLSE は式 (2.30) で与えられる。

$$i \frac{\partial E}{\partial z} - \frac{\beta_0^{(2)}}{2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \gamma |E|^2 E = 0 \quad (5.1)$$

以下では、最も簡単な場合を考えることとし、損失のないファイバを伝搬する単一モード動作、単一偏波で、かつ、準単色光近似が可能なパルス幅が 10ps よりも広い光パルスについて考えることにする。さらに、式 (5.1) において $\beta_0^{(2)}$ と γ はどちらも定数とする。ファイバからの出力時間波形 $E(z, t)$ は、与えられた初期波形 $E(z=0, t)$ に対して式 (5.1) を解くことによって求めることができる。

次に、出力時間波形 $E(z, t)$ から入力時間波形 $E(z=0, t)$ を求める逆問題について考えよう。この場合には、式 (5.1) において z を $-z$ に置き換えた

$$i \frac{\partial E}{\partial z} + \frac{\beta_0^{(2)}}{2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \gamma |E|^2 E = 0 \quad (5.2)$$

を解くことになる。このことは、符号を反転させた分散値と非線形係数を持つファイバに出力時間波形を入射した場合のファイバ出射端での時間波形を求めることと等価である。本章では、式 (5.1) を数值的に、あるいは、解析的に解く方法について解説し、さらに、各種の非線形補償法を概説する。

5.1 スプリット・ステップ・フーリエ法による数値解析

$\partial^2/\partial t^2$ を演算子と見なし、式 (5.1) を形式的に積分すると、

$$\begin{aligned} E(z_0 + \Delta z, t) &= \exp \left[-i \left(\frac{\beta_0^{(2)}}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \gamma |E|^2 \right) \Delta z \right] E(z_0, t) \\ &\simeq \exp \left(-i \Delta z \frac{\beta_0^{(2)}}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \exp(i \gamma |E|^2 \Delta z) E(z_0, t) \end{aligned} \quad (5.3)$$

となる。式 (5.3) は、次式に示す 2 つの式に分割することができる。

$$E(z_0 + \Delta z, t) = \exp\left(-i\Delta z \frac{\beta_0^{(2)}}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) E'(t) \quad (5.4)$$

$$E'(t) = \exp\{i\gamma|E(z_0, t)|^2\Delta z\}E(z_0, t) \quad (5.5)$$

式 (5.4) をフーリエ変換すると、

$$\hat{E}(z_0 + \Delta z, \Delta\omega) = \exp\left\{i\frac{\beta_2}{2}(\Delta\omega)^2\Delta z\right\} \hat{E}'(\Delta\omega) \quad (5.6)$$

となる。 $E(z_0, t)$ が与えられた場合に、まず、式 (5.5) の計算を時間領域で行い、 $E'(t)$ を求める。次に、高速フーリエ変換 (Fast Fourier Transform : FFT) を用いて、 $E'(t)$ を $\hat{E}'(\Delta\omega)$ に変換し、式 (5.6) の計算を周波数領域で行い、 $\hat{E}(z_0 + \Delta z, \Delta\omega)$ を求める。さらに、FFT の逆変換 (Inverse FFT : IFFT) を用いて、 $\hat{E}(z_0 + \Delta z, \Delta\omega)$ を $E(z_0 + \Delta z, t)$ に変換する。このような計算を繰り返し行うことで、入力時間波形 $E(z = 0, t)$ から、出力時間波形 $E(z = N\Delta z, t)$ を求めることができる。ここで、 N は正の整数である。このような NLSE の数値解法はスプリット・ステップ・フーリエ法 (Split-Step Fourier Method : SSFM) と呼ばれている。なお、式 (5.3) における演算子の分割は、 z 方向に対するステップサイズ Δz に比例した数値誤差を含む。よって、制約のある計算能力の下で、要求される精度を保證できるような Δz を適切に選ぶ必要がある。

式 (5.1) の逆問題を解くには、式 (5.3) より、

$$E(z_0, t) = \exp(-i\gamma|E|^2\Delta z) \exp\left(i\Delta z \frac{\beta_0^{(2)}}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) E(z_0 + \Delta z, t) \quad (5.7)$$

を解けばよいことが分かる。式 (5.7) に、前述の SSFM を繰り返し適用することによって、出力波形 $E(z = N\Delta z, t)$ から入力波形 $E(z = 0, t)$ を求めることができる。この方法は、逆伝搬法 (Back Propagation Method) と呼ばれている [1]。受信器において逆伝搬法を適用することにより、伝送路への入力波形を知ることができる。この直接的な方法は、他の方法に比べて比較的計算量が多いため、ステップサイズ Δz を大きくとる試みが、多くの研究者によって続けられている。もちろん、式 (5.7) は (5.2) から直接導くことができる。

5.2 ボルテラ級数展開による数値解析

前節で示した SSFM では、式 (5.1) の線形項と非線形項をシリアルに分解したが、ボルテラ級数 (Volterra Series) 展開 [2] では、それらの項を並列に分解する。

式 (5.1) をフーリエ変換し、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{E}(z, \Delta\omega)}{\partial z} &= G_1(\Delta\omega) \hat{E}(z, \Delta\omega) + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G_3(\Delta\omega_1, \Delta\omega_2, \Delta\omega - \Delta\omega_1 + \Delta\omega_2) \\ &\quad \times \hat{E}(z, \Delta\omega_1) \hat{E}^*(z, \Delta\omega_2) \hat{E}(z, \Delta\omega - \Delta\omega_1 + \Delta\omega_2) d(\Delta\omega_1) d(\Delta\omega_2) \end{aligned} \quad (5.8)$$

を得る。ここで、

$$G_1(\Delta\omega) = i \frac{\beta_0^{(2)}}{2} (\Delta\omega)^2 \quad (5.9)$$

$$G_3(\Delta\omega_1, \Delta\omega_2, \Delta\omega - \Delta\omega_1 + \Delta\omega_2) = i \frac{\gamma}{2\pi} \quad (5.10)$$

である。ボルテラ級数は、非線形問題に適用が可能なように一般化された伝達関数であり、周波数領域では次式で表される。

$$\begin{aligned} \hat{E}(z, \Delta\omega) &= H_1(\Delta\omega, z) \hat{E}(0, \Delta\omega) + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H_3(\Delta\omega_1, \Delta\omega_2, \Delta\omega - \Delta\omega_1 + \Delta\omega_2, z) \\ &\quad \times \hat{E}(0, \Delta\omega_1) \hat{E}^*(0, \Delta\omega_2) \hat{E}(0, \Delta\omega - \Delta\omega_1 + \Delta\omega_2) d(\Delta\omega_1) d(\Delta\omega_2) + \dots \end{aligned} \quad (5.11)$$

ここで、 $H_1(\Delta\omega, z)$ は線形伝達関数、 $H_3(\Delta\omega_1, \Delta\omega_2, \Delta\omega - \Delta\omega_1 + \Delta\omega_2, z)$ はボルテラ核 (Volterra Kernel) と呼ばれる 3 次の非線形伝達関数をそれぞれ表す。 H_1 と H_3 の初期条件は一般に次式で与えられる。

$$H_1(\Delta\omega, z = 0) = 1 \quad (5.12)$$

$$H_3(\Delta\omega_1, \Delta\omega_2, \Delta\omega - \Delta\omega_1 + \Delta\omega_2, z = 0) = 0 \quad (5.13)$$

式 (5.11) を z について微分し、(5.8) の左辺に代入する。さらに、式 (5.11) を代入した (5.8) の右辺と等しいとおくと、

$$\frac{\partial H_1(\Delta\omega, z)}{\partial z} = G_1(\Delta\omega) H_1(\Delta\omega, z) \quad (5.14)$$

$$\frac{\partial H_3(\Delta\omega_1, \Delta\omega_2, \Delta\omega - \Delta\omega_1 + \Delta\omega_2, z)}{\partial z} = G_1(\Delta\omega) H_3(\Delta\omega_1, \Delta\omega_2, \Delta\omega - \Delta\omega_1 + \Delta\omega_2, z) \quad (5.15)$$

が得られる。式 (5.9) および (5.10) を代入した (5.14) および (5.15) を初期条件 (5.12) および (5.13) の下で解くことにより、

$$H_1(\Delta\omega, z) = \exp \left\{ i \frac{\beta_0^{(2)}}{2} (\Delta\omega)^2 z \right\} \quad (5.16)$$

$$\begin{aligned}
& H_3(\Delta\omega_1, \Delta\omega_2, \Delta\omega - \Delta\omega_1 + \Delta\omega_2, z) \\
&= \frac{\gamma}{2\pi\beta_0^{(2)}} \exp \left\{ i \frac{\beta_0^{(2)}}{2} (\Delta\omega)^2 z \right\} \frac{\exp[i\beta_0^{(2)}(\Delta\omega - \Delta\omega_1)(\Delta\omega_2 - \Delta\omega_1)z] - 1}{(\Delta\omega - \Delta\omega_1)(\Delta\omega_2 - \Delta\omega_1)}
\end{aligned} \tag{5.17}$$

を得る。式 (5.16) と (5.17) を (5.11) に代入することにより、周波数領域において、入力スペクトル $\hat{E}(0, \Delta\omega)$ から出力スペクトル $\hat{E}(z, \Delta\omega)$ を求めることができる。

式 (5.1) の逆問題は、式 (5.16) と (5.17) において、ファイバの分散値と非線形係数の符号を反転し、式 (5.11) の入力スペクトル $\hat{E}(0, \Delta\omega)$ として出力スペクトル $\hat{E}(z, \omega)$ を用いて、式 (5.11) の出力スペクトル $\hat{E}(z, \Delta\omega)$ として入力スペクトル $\hat{E}(0, \Delta\omega)$ を求めることによって解くことができる [3]。ボルテラ級数展開法を用いることによって、前節で示した逆伝搬法に比べて非線形補償の計算複雑性を低減することができる [3]。

5.3 摂動法の適用

標準的な単一モードファイバを用いた無分散補償伝送路では、非線形効果に比べて分散効果がより支配的である。そのため、式 (5.1) において非線形項を摂動項として取り扱うことができる [4]。まず、 $E(z, t)$ を次式のように展開する。

$$E(z, t) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \gamma^{\ell} E_{\ell}(z, t) = E_0(z, t) + \gamma E_1(z, t) + \gamma^2 E_2(z, t) + \dots \tag{5.18}$$

式 (5.18) を (5.1) に代入し、0 次および 1 次のオーダーの式として、

$$O(1) : i \frac{\partial E_0}{\partial z} - \frac{\beta_0^{(2)}}{2} \frac{\partial^2 E_0}{\partial t^2} = 0 \tag{5.19}$$

$$O(\gamma) : i \frac{\partial E_1}{\partial z} - \frac{\beta_0^{(2)}}{2} \frac{\partial^2 E_1}{\partial t^2} + |E_0|^2 E_0 = 0 \tag{5.20}$$

が得られる。入力パルス列は

$$E(z=0, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k \exp(i\theta_k) v(z=0, t - kT) . \tag{5.21}$$

で与えられるとする。ここで、 A_k および θ_k はそれぞれ k 番目のパルスの変調された振幅と位相を表す実数である。 $v(z=0, t - kT)$ は時刻 $t = kT$ を中心時間位置とするパルスの波形を表し、 T はパルス間隔、すなわち、シンボルレートの逆数である。このとき、 $E_0(z=0, t)$ および $E_{\ell}(z=0, t)$ ($\ell \geq 1$) の初期条件を

$$E_0(z=0, t) = E(z=0, t) \tag{5.22}$$

$$E_\ell(z = 0, t) = 0 \quad (\ell \geq 1) \quad (5.23)$$

とする。式 (5.21) をフーリエ変換すると、

$$\hat{E}(z = 0, \Delta\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \exp[i(\theta_k - \Delta\omega kT)] \hat{v}(z = 0, \Delta\omega) \quad (5.24)$$

となる。ここで、

$$\hat{v}(z = 0, \Delta\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} v(z = 0, \tau) \exp(-i\Delta\omega\tau) d\tau \quad (5.25)$$

である。よって、式 (5.19) の解は

$$E_0(z, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k \exp(i\theta_k) v_k(z, t) \quad (5.26)$$

となる。ここで、

$$v_k(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{v}(z = 0, \Delta\omega) \exp \left[i \left\{ \frac{\beta_0^{(2)}}{2} (\Delta\omega)^2 z + (t - kT) \Delta\omega \right\} \right] d(\Delta\omega) \quad (5.27)$$

である。同様の手順を用いて、式 (5.20) の解を次式のように求めることができる。

$$E_1(z, t) = \frac{i}{2\pi} \int_0^z \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |E_0(\zeta, t')|^2 E_0(\zeta, t') e^{-i\Delta\omega t'} dt' \right) \times \exp \left[i \left\{ \frac{\beta_0^{(2)}}{2} (z - \zeta) (\Delta\omega)^2 + \omega t \right\} \right] d(\Delta\omega) \right\} d\zeta \quad (5.28)$$

式 (5.26) を (5.28) に代入し、

$$E_1(z, t) = \frac{i}{2\pi} \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} \sum_{k_3=-\infty}^{\infty} A_{k_1} A_{k_2} A_{k_3} \exp[i(\theta_{k_1} - \theta_{k_2} + \theta_{k_3})] \times \int_0^z \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} v_{k_1}(\zeta, t') v_{k_2}^*(\zeta, t') v_{k_3}(\zeta, t') e^{-i(\Delta\omega)t'} dt' \right) \times \exp \left[i \left\{ \frac{\beta_0^{(2)}}{2} (z - \zeta) (\Delta\omega)^2 + \Delta\omega t \right\} \right] d(\Delta\omega) \right\} d\zeta \quad (5.29)$$

を得る。受信器における受信波形から式 (5.29) を差し引くことにより、非線形性に起因する歪みを補償することができる [5]。また、この概念は送信器における前置補償にも応用することができる [6]。パルス波形としてガウス型パルスを仮定すると、式 (5.29) の積分を解析的に行うことができ、非線形性に起因する歪み補償のための計算複雑性を、5.1 および 5.2 節で示した方法に比べて、劇的に減らすことができる [4,7]。

式 (5.21) に示す入射端 ($z = 0$) におけるパルスとしてガウス形パルス

$$v(z = 0, \tau) = \exp \left\{ -\frac{p_0^2}{2} (1 - iC_0) \tau^2 \right\} \quad (5.30)$$

を考える。ここで、 p_0 および C_0 は、それぞれパルス幅の逆数および線形チャープの入射端における値を表す。式 (5.25) に (5.30) を代入し、積分を実行すると

$$\hat{v}(z = 0, \Delta\omega) = \frac{(1 + C_0^2)^{-\frac{1}{4}}}{p_0} \exp \left\{ -\frac{1 + iC_0}{2p_0^2(1 + C_0^2)} (\Delta\omega)^2 + \frac{i}{2} \tan^{-1} C_0 \right\} \quad (5.31)$$

となる。さらに、式 (5.31) と (5.17) を (5.27) に代入し、

$$\begin{aligned} v(z, t) &= \frac{(1 + C_0^2)^{-\frac{1}{4}}}{\sqrt{2\pi} p_0} \exp \left\{ \frac{i}{2} \tan^{-1} C_0 \right\} \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{1}{2} \left\{ \frac{1 + iC_0}{p_0^2(1 + C_0^2)} - i\beta_0^{(2)} z \right\} (\Delta\omega)^2 + i\Delta\omega t \right] d(\Delta\omega) \end{aligned} \quad (5.32)$$

を得る。積分を実行すると、

$$v(z, t) = A(z) \exp \left[-\frac{p^2(z)}{2} \{1 - iC(z)\} t^2 + i\theta(z) \right] \quad (5.33)$$

となる。ここで、

$$A(z) = \{(1 - p_0^2 C_0 \beta_0^{(2)} z)^2 + (p_0^2 \beta_0^{(2)} z)^2\}^{-\frac{1}{4}} \quad (5.34)$$

$$p(z) = p_0 \{(1 - p_0^2 C_0 \beta_0^{(2)} z)^2 + (p_0^2 \beta_0^{(2)} z)^2\}^{-\frac{1}{2}} \quad (5.35)$$

$$C(z) = C_0 - p_0^2 (1 + C_0^2) \beta_0^{(2)} z \quad (5.36)$$

$$\theta(z) = \frac{1}{2} \left[\tan^{-1} C_0 - \tan^{-1} \{C_0 - p_0^2 (1 + C_0^2) \beta_0^{(2)} z\} \right] \quad (5.37)$$

はそれぞれパルスの振幅、パルス幅の逆数、線形チャープ、位相を表す。式 (5.33) を (5.29) に代入して積分を実行すると、

$$\begin{aligned} E_1(z, t) &= i \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} \sum_{k_3=-\infty}^{\infty} A_{k_1} A_{k_2} A_{k_3} \exp[i(\theta_{k_1} - \theta_{k_2} + \theta_{k_3})] \\ &\times \int_0^z \frac{A^3 \exp(i\theta)}{\sqrt{1 - i\beta_0^{(2)} p^2 (3 - iC)(z - \zeta)}} \exp \left[-\frac{1}{32p^6 (3 - iC)^5} \right. \\ &\times [32p^8 T^2 (3 - iC)^4 (1 - iC) \\ &\times \{(k_1 - k_3)^2 + (1 + iC)(k_1 - k_2)(k_3 - k_2)\} \\ &\left. + \{1 - i\beta_0^{(2)} p^2 (3 - iC)(z - \zeta)\}^3 \right. \\ &\left. \times \{(3 - iC)t + [(1 - iC)(k_1 + k_3) + (1 + iC)k_2]T\}^2 \right] d\zeta \end{aligned} \quad (5.38)$$

となる。 $p_0^2|\beta_0^{(2)}|z \gg 1$ の場合について考えよう。このとき、式 (5.34)-(5.37) は

$$A(z) = \{(1 + C_0^2)(p_0^2\beta_0^{(2)}z)^2\}^{-\frac{1}{4}} \quad (5.39)$$

$$p^2(z) = \{(1 + C_0^2)(p_0\beta_0^{(2)}z)^2\}^{-1} \quad (5.40)$$

$$C(z) = -p_0^2(1 + C_0^2)\beta_0^{(2)}z \quad (5.41)$$

$$\theta(z) = \frac{\pi}{4} \operatorname{sgn}(\beta_0^{(2)}) \quad (5.42)$$

と近似できる。これらの式を (5.38) に代入すると、

$$\begin{aligned} E_1(z, t) &= \frac{1}{\{(1 + C_0^2)(p_0^2\beta_0^{(2)})^2\}^{3/4} \sqrt{z}} \exp \left[i \frac{\pi \{2 + \operatorname{sgn}(\beta_0^{(2)})\}}{4} \right] \\ &\times \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} \sum_{k_3=-\infty}^{\infty} A_{k_1} A_{k_2} A_{k_3} \exp[i(\theta_{k_1} - \theta_{k_2} + \theta_{k_3})] \\ &\times \exp \left[-i \frac{(\beta_0^{(2)}z)^3}{32} \{t - (k_1 + k_3 - k_2)T\}^2 \right] \\ &\times \int_0^z \frac{1}{\zeta} \exp \left[i \frac{(k_1 - k_2)(k_3 - k_2)T^2}{\beta_0^{(2)}\zeta} \right] d\zeta \end{aligned} \quad (5.43)$$

となる。 $s = i\zeta/z_0$, ($z_0 = (k_1 - k_2)(k_3 - k_2)T^2/\beta_0^{(2)}$) とおいて、式 (5.43) を変数変換すると、

$$\begin{aligned} E_1(z, t) &= \frac{1}{\{(1 + C_0^2)(p_0^2\beta_0^{(2)})^2\}^{3/4} \sqrt{z}} \exp \left[i \frac{\pi \{2 + \operatorname{sgn}(\beta_0^{(2)})\}}{4} \right] \\ &\times \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} \sum_{k_3=-\infty}^{\infty} A_{k_1} A_{k_2} A_{k_3} \exp[i(\theta_{k_1} - \theta_{k_2} + \theta_{k_3})] \\ &\times \exp \left[-i \frac{(\beta_0^{(2)}z)^3}{32} \{t - (k_1 + k_3 - k_2)T\}^2 \right] \\ &\times \int_0^{iz/z_0} \frac{1}{s} \exp \left(-\frac{1}{s} \right) ds \\ &= \frac{1}{\{(1 + C_0^2)(p_0^2\beta_0^{(2)})^2\}^{3/4} \sqrt{z}} \exp \left[i \frac{\pi \{2 + \operatorname{sgn}(\beta_0^{(2)})\}}{4} \right] \\ &\times \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} \sum_{k_3=-\infty}^{\infty} A_{k_1} A_{k_2} A_{k_3} \exp[i(\theta_{k_1} - \theta_{k_2} + \theta_{k_3})] \\ &\times \exp \left[-i \frac{(\beta_0^{(2)}z)^3}{32} \{t - (k_1 + k_3 - k_2)T\}^2 \right] \\ &\times \tilde{E}_1 \left(-i \frac{z_0}{z} \right) \end{aligned} \quad (5.44)$$

となる。ここで、 $\tilde{E}_1(x)$ は式 (4.248) に示す積分指数関数である。

参考文献

- [1] E. Ip and J. M. Kahn, “Compensation of Dispersion and Nonlinear Impairments Using Digital Backpropagation,” *IEEE/OSA J. Lightwave Technol.*, Vol.26, No.20, pp.3416-3425 (2008).
- [2] K. V. Peddanarappagari and M. Brandt-Pearce, “Volterra Series Transfer Function of Single-Mode Fibers,” *IEEE/OSA J. Lightwave Technol.*, Vol.15, No.12, pp.2232-2241 (1997).
- [3] L. Liu, L. Li, Y. Huang, K. Cui, Q. Xiong, F. N. Hauske, C. Xie, Y. Cai, “Intrachannel Nonlinearity Compensation by Inverse Volterra Series Transfer Function,” *IEEE/OSA J. Lightwave Technol.*, Vol.30, No.3, pp.310-316 (2012).
- [4] A. Mecozzi, C. B. Clausen, and M. Shtaif, “Analysis of Intrachannel Nonlinear Effects in Highly Dispersed Optical Pulse Transmission,” *IEEE Photon. Technol. Lett.*, Vol.12, No.4, pp.392-394 (2000).
- [5] W. Yan, Z. Tao, L. Dou, L. Li, S. Oda, T. Tanimura, T. Hoshida, and J. C. Rasmussen, “Low Complexity Digital Perturbation Back-propagation,” in *Proc. ECOC2011*, paper Tu.3.A.2 (2011).
- [6] Z. Tao, L. Dou, W. Yan, L. Li, T. Hoshida, and J. C. Rasmussen, “Multiplier-Free Intrachannel Nonlinearity Compensating Algorithm Operating at Symbol Rate,” *IEEE/OSA J. Lightwave Technol.*, Vol.29, No.17, pp.2570-2576 (2011).
- [7] 小山智史, 星田剛司, 中島久雄, 大嶋千裕, Zhenning Tao, Jens C. Rasmussen, “非線形補償を適用した光伝送システムにおけるパルス形式及び送受信器の不完全性の影響,” 電子情報通信学会光通信システム研究会, 信学技報 OCS2013-24 (July 2013).

第6章 今後の展望

デジタルコヒーレント光伝送技術への無線通信技術の移入に一段落がついた今、伝送媒体の差異に着目した新しい技術の開発、特に、残された問題である非線形光学効果を克服するための、光ファイバ通信に特化した伝送技術および信号処理技術の開発が待望されている、そのためには、線形問題の枠組みを超えた新しいフレームで思考することが必要である。

非線形問題について考えるために、簡単な2次方程式

$$x - 1 = \varepsilon x^2 \quad (6.1)$$

を解くことを考えてみよう。

式(6.1)は2次方程式の解の公式を使って解くことができ、その厳密解は

$$x_{\text{exact}} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\varepsilon}}{2\varepsilon} \quad (6.2)$$

となる。一方、非線形性の大きさを表すパラメータ ε が0の場合には、式(6.1)は1次方程式、すなわち、線形方程式となり、その解は

$$x_{\text{linear}} = 1 \quad (6.3)$$

となる。また、 $|\varepsilon| \ll 1$ の場合には、式(6.1)を漸近展開を使って近似解を求めることができる。式(6.1)の解を ε のべき級数で表し、

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k x_k = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \varepsilon^3 x_3 + \varepsilon^4 x_4 + \cdots \quad (6.4)$$

とする。式(6.4)を(6.1)に代入し、 ε のオーダー毎に分離すると、

$$O(1) : x_0 = 1 \quad (6.5)$$

$$O(\varepsilon) : x_1 = x_0^2 \quad (6.6)$$

$$O(\varepsilon^2) : x_2 = 2x_0x_1 \quad (6.7)$$

$$O(\varepsilon^3) : x_3 = x_1^2 + 2x_0x_2 \quad (6.8)$$

$$O(\varepsilon^4) : x_4 = 2x_1x_2 + 2x_0x_3 \quad (6.9)$$

⋮

となる。上式を $x_k, (k = 0, 1, 2, \dots)$ について解き、式 (6.4) に代入すると、

$$x = 1 + \varepsilon + 2\varepsilon^2 + 5\varepsilon^3 + 14\varepsilon^4 + \dots \quad (6.10)$$

となる。この結果は、式 (6.2) の厳密解のうち、複号を「-」にとった解において、 $\sqrt{1-4\varepsilon}$ を $\varepsilon = 0$ のまわりでテイラー展開した結果と一致する。また、 $x_0 = x_{\text{linear}}$ である。式 (6.10) を ε の n 乗の項までで打ち切った近似解を n 次の近似解という。式 (6.1) の厳密解 [(6.2)] と近似解 [(6.10)] を図 6.1 に示す。図から明らかなように、 ε が大きくなると、近似解と厳密解との誤差が増加する。また、 n を大きくすると、近似解は厳密解に近づくが、 ε が大きい場合の誤差はやはり大きい。

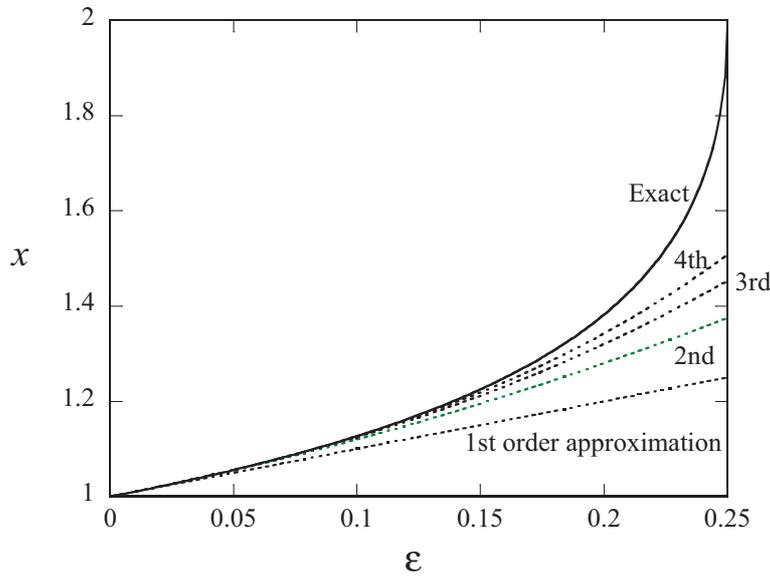


図 6.1: 2 次方程式 $x - 1 = \varepsilon x^2$ の厳密解と近似解

さて、本報告書でとりあげた非線形シャノン限界と非線形補償技術の内容と、式 (6.1) の解について考えてみよう。第 3 章、第 4 章、第 5.3 節でとりあげた内容については、漸近級数の 1 次の近似解に相当する。第 5.1 節、第 5.2 節でとりあげた内容については、実際の計算では非線形方程式を数値解析することに相当する。よって、非線形性の影響が大きくなる場合、すなわち、ファイバの非線形係数が大きい場合、もしくは、伝送距離が長い場合、光パルスのピーク電力が大きい場合には、誤差が大きくなったり、計算量が多くなったりする。

ところで、ファイバ中の光パルスの振る舞いを記述する非線形シュレディンガー方程式 (2.30) やマナコフ方程式 (2.67) の初期値問題は逆散乱変換 (Inverse Scattering Transform : IST)[1,2] によって解析的に解けることが知られている。すなわち、非線形性の影響の大きさに依らず、厳密解を得る方法であり、2 次方程式 (6.1) の解の公式に相当する。最近、デジタルコヒーレント技術と IST に基づく新たな光

変復調方式として光固有値伝送方式 [3-12] や IST に基づくデジタル信号処理技術 [13] が報告されており、今後の展開が期待される。

参考文献

- [1] V. E. Zakharov and A. B. Shabat, "Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media," *Sov. Phys. JETP*, Vol.34, No.1, pp.62-69 (Jan. 1972).
- [2] M. J. アプロビッツ, H. シーガー著 (薩摩順吉, 及川正行訳), "ソリトンと逆散乱変換," 日本評論社 (1991).
- [3] Akira Hasegawa and Takayuki Nyu, "Eigenvalue communication," *IEEE/OSA J. Lightwave Technol.*, Vol.11, No.3, pp.395-399 (March 1993).
- [4] 寺内大樹, 丸田章博, "デジタルコヒーレント技術に基づく固有値変調光伝送システム," 2013年電子情報通信学会総合大会, 岐阜大学, B-10-45 (平成25年3月20日).
- [5] Hiroki Terauchi and Akihiro Maruta, "Eigenvalue Modulated Optical Transmission System Based on Digital Coherent Technology," The 10th Conference on Lasers and Electro-Optics Pacific Rim, and the 18th OptoElectronics and Communications Conference / Photonics in Switching 2013 (CLEO-PR&OECC/PS 2013), Kyoto International Conference Center, Kyoto, Japan, Paper WR2-5 (3, July 2013).
- [6] 寺内大樹, 丸田章博, "デジタルコヒーレント技術に基づく固有値変調光伝送," 電子情報通信学会光通信システム研究会, OCS-2013-27, 東京・すみだ産業会館 (平成25年7月25日).
- [7] 松田雄大, 寺内大樹, 丸田章博, "多値固有値変調光伝送方式の基礎的検討," 電子情報通信学会第27回光通信システムシンポジウム, 東レ総合研修センター (静岡県三島市), ポスター発表 P-8 (平成25年12月12日).
- [8] 松田雄大, 寺内大樹, 丸田章博, "固有値多重による多値変調光伝送方式の検討," 電子情報通信学会光通信システム研究会, OCS-2013-113, 沖縄・ネストホテル那覇 (平成26年2月28日).
- [9] 寺内大樹, 丸田章博, "固有値変調光伝送システムにおける固有値の雑音耐性," 電子情報通信学会光通信システム研究会, OCS-2013-114, 沖縄・ネストホテル那覇 (平成26年2月28日).
- [10] 豊田彰史, 寺内大樹, 松田雄大, 丸田章博, "光固有値変調方式の波長分割多重伝送への適用," 2014年電子情報通信学会総合大会, 新潟大学, B-10-48 (平成26年

3月20日).

[11] Hiroki Terauchi, Yuki Matsuda, Akifumi Toyota, and Akihiro Maruta, “Noise Tolerance of Eigenvalue Modulated Optical Transmission System Based on Digital Coherent Technology,” The 19th OptoElectronics and Communications Conference / Australian Conference on Optical Fibre Technology 2014 (OECC/ACOFT 2014), Melbourne Convention and Exhibition Centre, Melbourne, Australia, Paper WEPS2-56 (9, July 2014).

[12] Yuki Matsuda, Hiroki Terauchi, and Akihiro Maruta, “Design of Eigenvalue-multiplexed Multi-level Modulation Optical Transmission System,” The 19th OptoElectronics and Communications Conference / Australian Conference on Optical Fibre Technology 2014 (OECC/ACOFT 2014), Melbourne Convention and Exhibition Centre, Melbourne, Australia, Paper TH12B3 (10, July 2014).

[13] Elena G. Turitsyna and Sergei K. Turiritsyn, “Digital signal processing based on inverse scattering transform,” *Opt. Lett.*, Vol.11, No.3, pp.4186-4188 (Oct. 2013).

あとがき

光増幅技術によりファイバ損失を克服し、デジタルコヒーレント技術により、群速度分散や偏波モード分散などによる線形的な信号歪みを克服した光ファイバ伝送技術に残された問題は、光増幅器雑音による信号対雑音電力比 (SN 比) の劣化とファイバ中で生じる非線形光学効果に起因する信号歪みである。よって、光ファイバ伝送システムでは、SN 比の劣化に非線形信号歪みの影響を加味した通信路容量を与える「非線形シャノン限界」の克服が乗り越えるべき技術課題である。

本報告書は、「非線形シャノン限界」および、非線形信号歪みを補償する「非線形補償技術」に関するいくつかの理論について、その調査研究内容をまとめたものである。第 2 章では、後の章での議論の出発点となるファイバ中での光波の振る舞いを記述する非線形シュレディンガー方程式 (NLSE) とマナコフ方程式を紹介した。第 3 章および第 4 章では、NLSE から非線形シャノン限界が演繹的に導かれる過程を示した。第 5 章では、3 種類の NLSE の解法を示し、それらの解法をどのように非線形補償技術に適用するかを示した。最後に、第 6 章では、非線形問題に対するいくつかのアプローチ法を比較し、非線形性を考慮した光ファイバ伝送技術の今後の技術展望の一端を紹介した。

本報告書を執筆するに当たり、理論を主とする論文を理解する上での障壁となる数式の導出過程をできるだけ丁寧に追うことに努めた。原論文を読む際に、本報告書が少しでもお役にたてば幸いである。また、このような理論的基礎の理解が、光ファイバ伝送技術に残された「非線形補償」問題に挑戦する上での道しるべとなることを希望する。

なお、本報告書には情報通信研究機構 (NICT) の委託研究「光トランスペアレント伝送技術の研究開発」の一部として実施した論文調査の成果が含まれている。